

5. Elektrodynamik – Elektromagnetische Wellen

Quasistatische Näherung: $\rho(\vec{r}, t)$ $\vec{j}(\vec{r}, t)$ $\vec{E}(\vec{r}, t)$ $\vec{B}(\vec{r}, t)$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

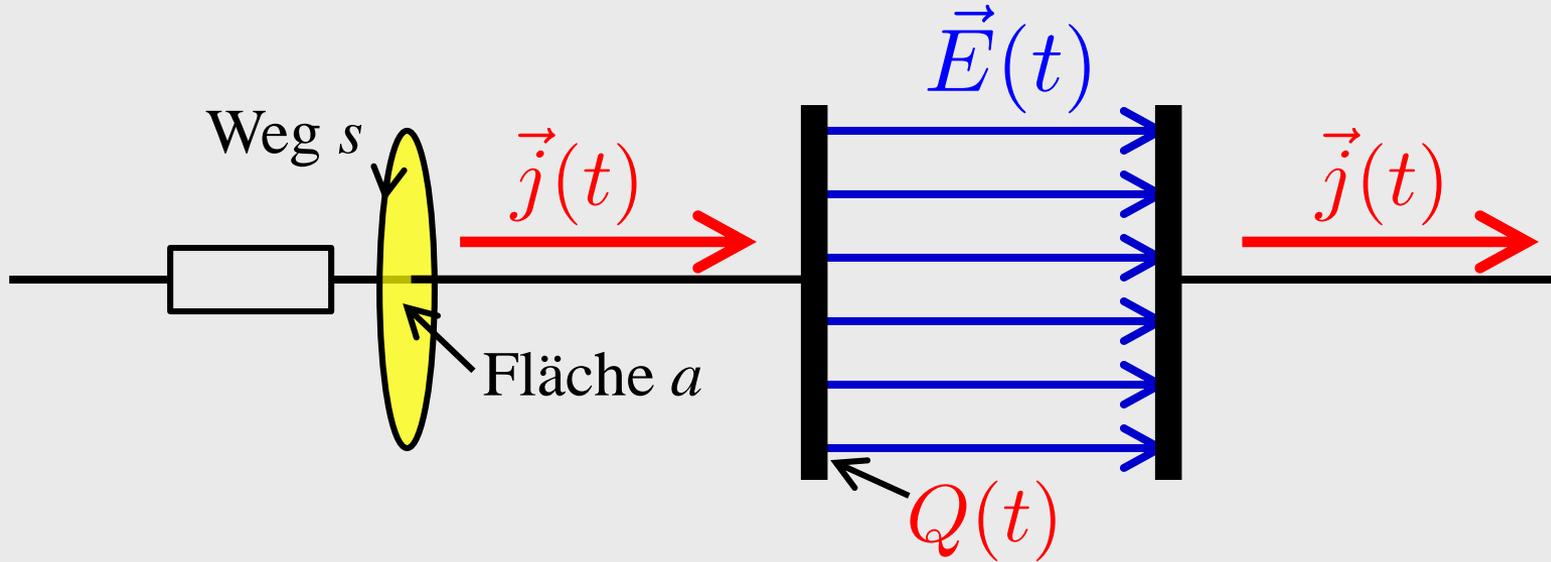
5.1. Der Maxwellsche Verschiebungsstrom

Ladungserhaltung \Rightarrow Kontinuitätsgleichung $\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Jedoch: $\mu_0 \operatorname{div} \vec{j} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} \equiv 0$ **Widerspruch!!!**

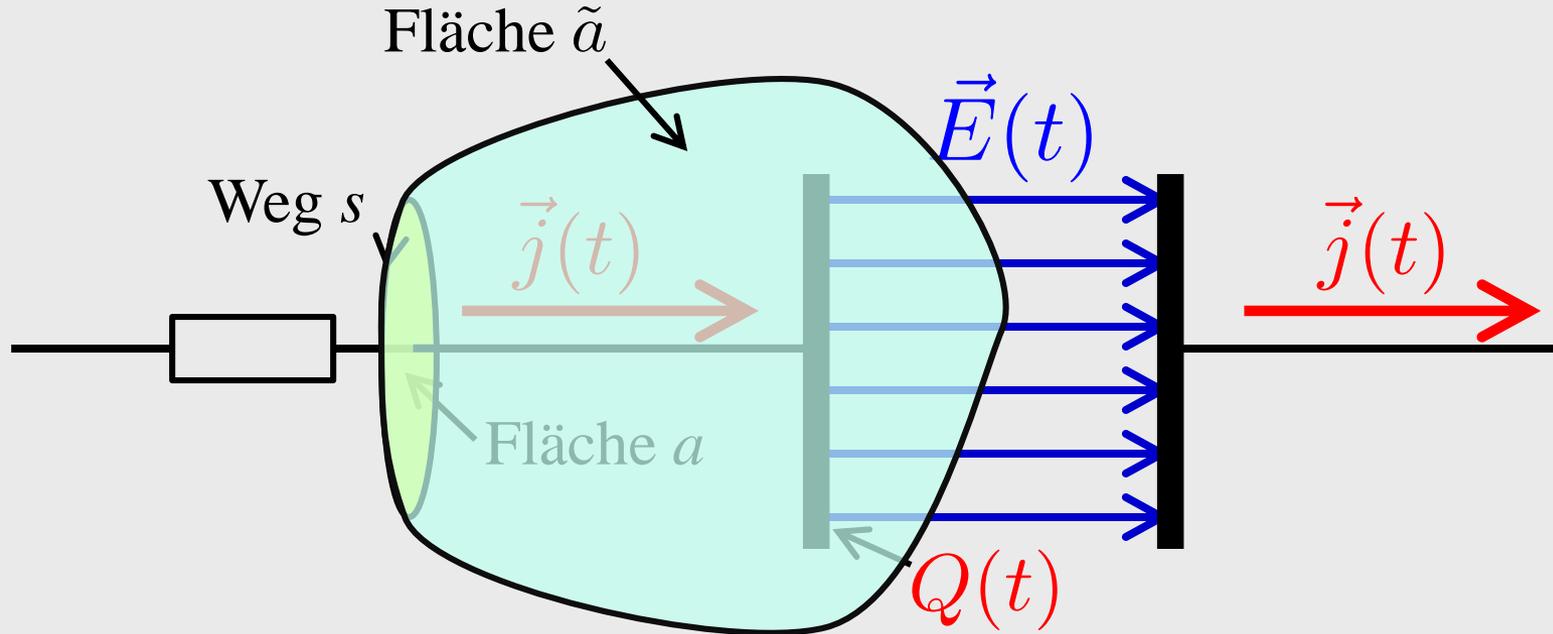
Die Gleichungen der Quasistatik müssen unvollständig sein!

Beispiel: Laden eines Kondensators



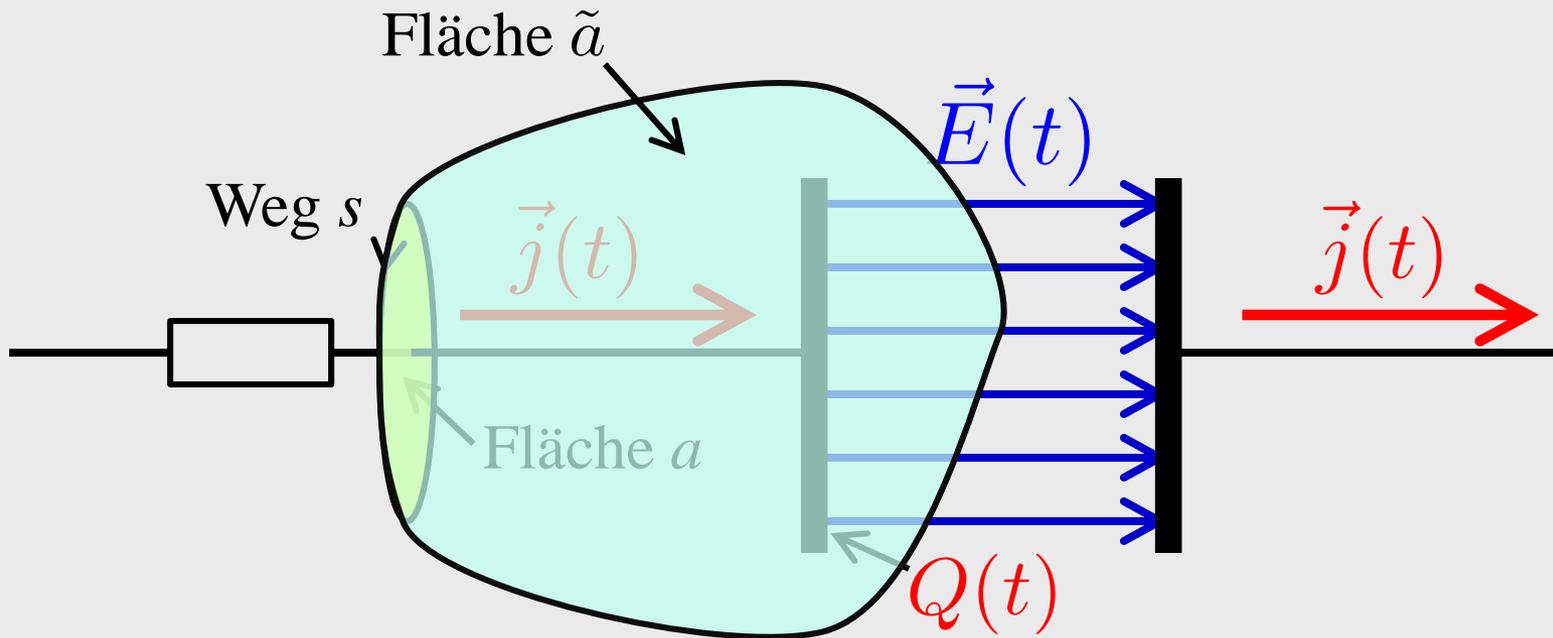
$$\oint_s \vec{B} d\vec{r} = \int_a \text{rot } \vec{B} d\vec{a} = \mu_0 \int_a \vec{j} d\vec{a} = \mu_0 I(t)$$

Wähle andere Fläche mit demselben Rand s :



$$\oint_s \vec{B} d\vec{r} = \int_{\tilde{a}} \text{rot } \vec{B} d\vec{a} = \mu_0 \int_{\tilde{a}} \vec{j} d\vec{a} = 0 \neq \mu_0 I(t)$$

Widerspruch!!!



$$\oint_s \vec{B} d\vec{r} = \int_{\tilde{a}} \text{rot } \vec{B} d\vec{a} = \mu_0 \int_{\tilde{a}} \vec{j} d\vec{a} = 0 \neq \mu_0 I(t)$$

Beobachtung:

$$I(t) = \dot{Q}(t) = \oint_{a \cup \tilde{a}} \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{a} = \int_{\tilde{a}} \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{a}$$

$$\oint_s \vec{B} d\vec{r} = \int_{\tilde{a}} \text{rot } \vec{B} d\vec{a} = \mu_0 \int_{\tilde{a}} \vec{j} d\vec{a} = 0 \neq \mu_0 I(t)$$

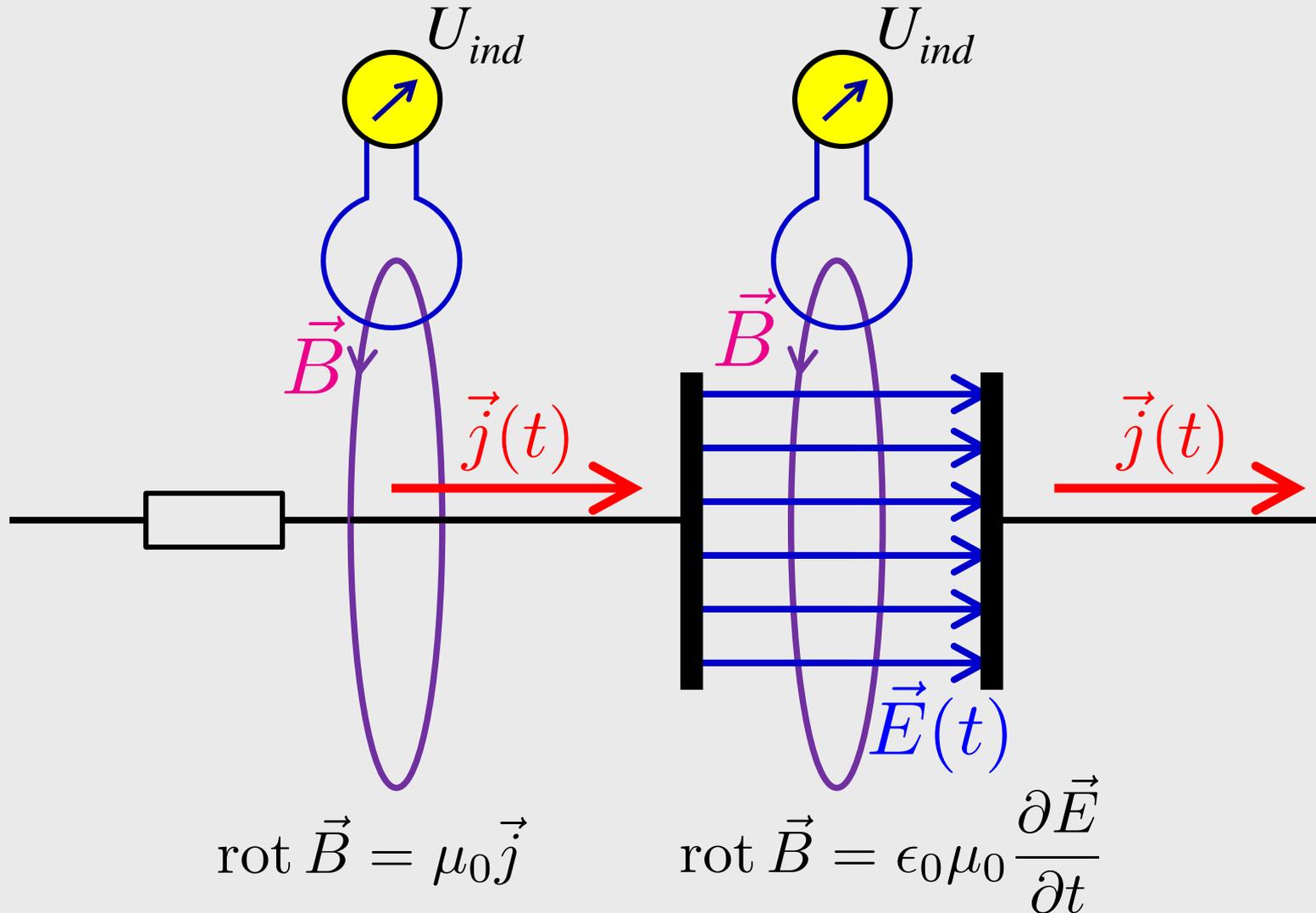
$$I(t) = \dot{Q}(t) = \oint_{a \cup \tilde{a}} \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{a} = \int_{\tilde{a}} \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{a}$$

⇒ Problem reparierbar durch Einführung von

Maxwellsche Verschiebungsstromdichte $\vec{j}_V = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Folgerung: $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_V) = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Experimenteller Test: Nachweis magnetischer Wirbelfelder um zeitlich veränderliche Ströme und zeitlich veränderliche E -Felder mit Induktionsschleifen (Antennen).



$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Folgerung: Ladungserhaltung

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \operatorname{div} \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E} \\ &= \mu_0 \operatorname{div} \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho}{\epsilon_0} = \mu_0 \left(\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Kontinuitätsgleichung

Abkürzende Bezeichnung:

$$c \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

Wir werden zeigen: c ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen (Lichtgeschwindigkeit).

Folgerung:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Bemerkung: Ausbreitungsgeschwindigkeit von Signalen in einem Schaltkreis $\ll c \Rightarrow$ Beitrag des Verschiebungsstroms ist vernachlässigbar klein \Rightarrow Quasistatische Näherung war gerechtfertigt

5.2. Die Maxwell-Gleichungen

Wir beschränken uns auf E -, B -Felder ohne Materieeffekte
($\epsilon = \mu = 1$)

Maxwell-Gleichungen

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

mit $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$

Bemerkung: in Materie

$$c_{\text{Materie}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu \epsilon_0 \mu_0}}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Wir benötigen nun **zeitabhängige** Potentiale:

$$\phi(\vec{r}, t) \quad \vec{A}(\vec{r}, t)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

5.3. Elektromagnetische Wellen

Untersuche E -, B -Felder im Vakuum $\rightarrow \rho \equiv 0, \vec{j} \equiv \vec{0}$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

5.3.1. Die Wellengleichung

Rechenregel für Vektorfelder:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{V} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{V} - \Delta \vec{V}$$

mit

$$\Delta \vec{V} = \begin{pmatrix} \Delta V_x \\ \Delta V_y \\ \Delta V_z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \Delta V_x = \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \quad \text{etc.}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Spielen mit den Maxwell-Gleichungen:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Folgerung:

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Wellengleichung mit Phasengeschwindigkeit c

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Ausgeschrieben in Komponenten (zur Verdeutlichung):

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

5.3.2. Das elektrische Feld ebener elektromagnetischer Wellen

Betrachte einfachen (aber wichtigen) Spezialfall:

ebene Welle: $\vec{E}(x, y, z, t) \equiv \vec{E}(z, t)$

Wellengleichung (ebene Welle): $\Delta \vec{E} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Lösungen:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \cdot f(z \pm ct)$$

mit $\vec{E}_0 = \text{const.}$

$f(\dots)$ = beliebige Funktion, zweimal differenzierbar

Wellengleichung (ebene Welle): $\Delta \vec{E} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

Lösungen:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \cdot f(z \pm ct)$$

mit $\vec{E}_0 = \text{const.}$

$f(\dots)$ = beliebige Funktion, zweimal differenzierbar

Probe 1 (Wellengleichung):

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \vec{E}_0 \cdot f''(z \pm ct)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{E}_0 \cdot (\pm c)^2 f''(z \pm ct) = \vec{E}_0 \cdot c^2 f''(z \pm ct)$$

⇒ Wellengleichung erfüllt

Wellengleichung (ebene Welle):
$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Lösungen:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \cdot f(z \pm ct)$$

mit $\vec{E}_0 = \text{const.}$

$f(\dots)$ = beliebige Funktion, zweimal differenzierbar

Probe 2 (Maxwellgleichung):

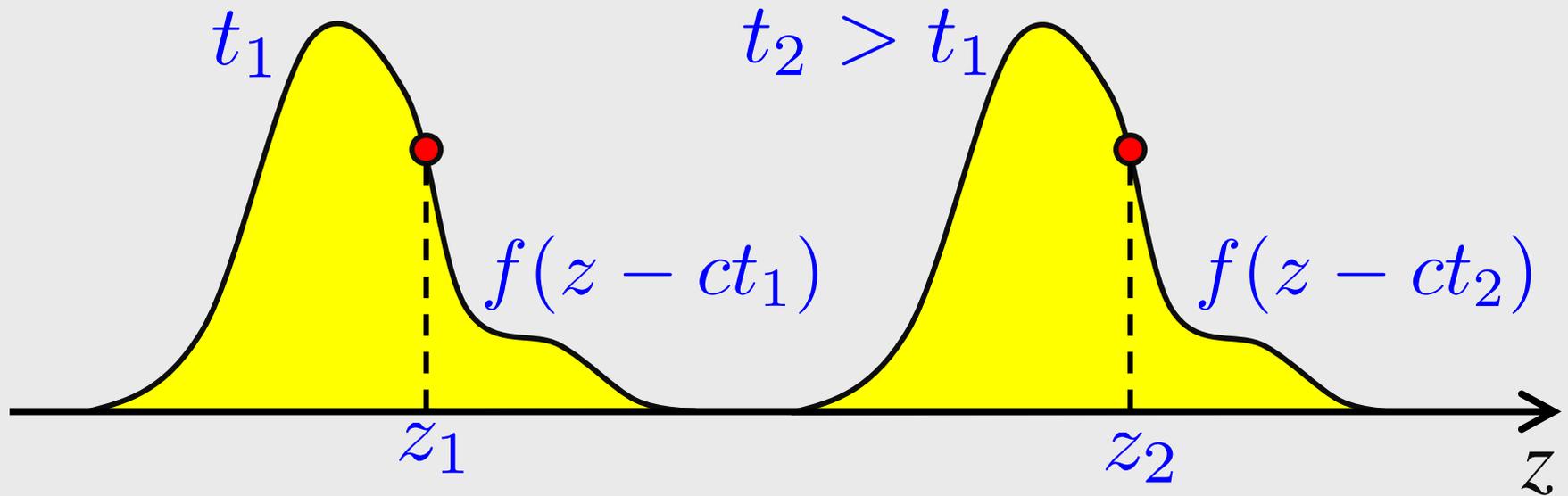
$$\text{div } \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow E_{0_z} \cdot f'(z \pm ct) = 0$$

Dies muss für alle z, t gelten, und E -Feld soll nicht konstant sein!

$$\Rightarrow E_{0_z} = 0$$

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \cdot \underbrace{f(z \pm ct)}_{\text{Phase}}, \quad \vec{E}_0 \perp \vec{e}_z$$

Bemerkung 1: Punkte konstanter Phase bilden zu jeder Zeit t Flächen **senkrecht** zur z -Achse (\leftrightarrow ebene Welle).



$$z_1 - ct_1 = z_2 - ct_2 \Rightarrow c = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1}$$

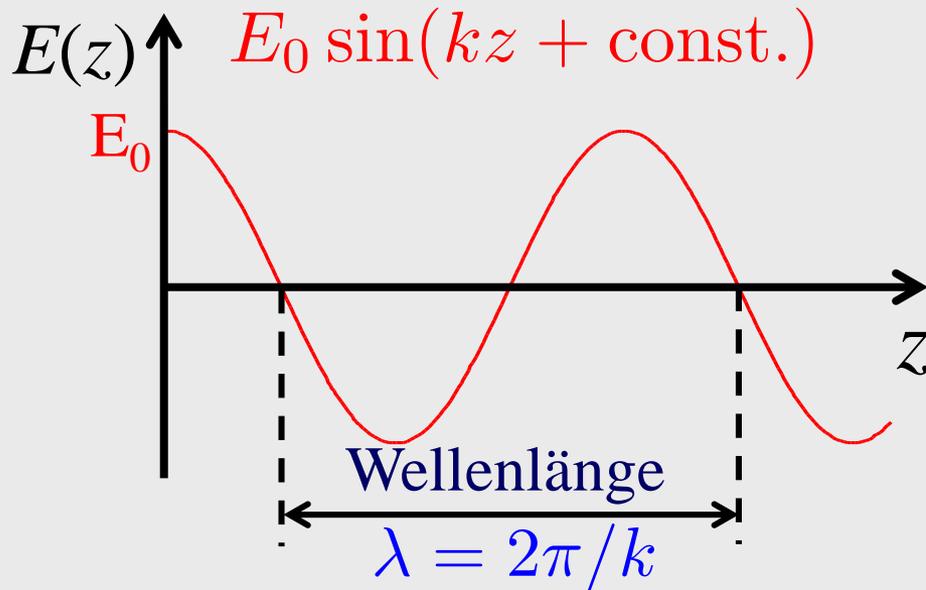
Bemerkung 2: Phasenflächen bewegen sich mit Geschwindigkeit c in $\pm z$ -Richtung. $c =$ **Phasengeschwindigkeit**

Spezialfall: **Harmonische** ebene Welle

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \sin(k(z \pm ct)) , \quad \vec{E}_0 \perp \vec{e}_z$$

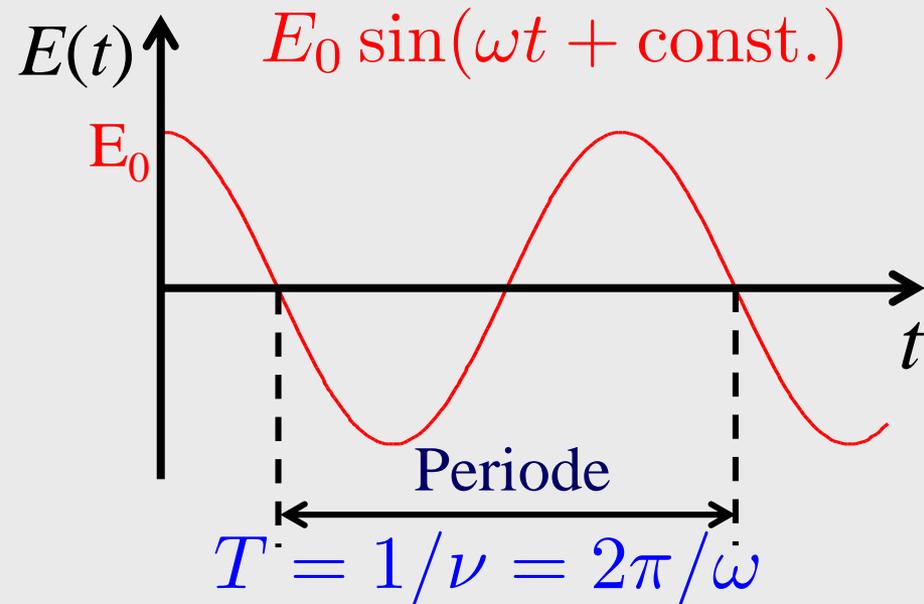
Theorem: Jede Lösung der vollen Wellengleichung kann als eine Überlagerung harmonischer ebener Wellen geschrieben werden.

$t = \text{const.}$



$k = \underline{\text{Wellenzahl}}$

$z = \text{const.}$



$\omega = ck$
Dispersionsrelation

5.3.3. Polarisation elektromagnetischer Wellen

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \sin(kz - \omega t) \quad \text{mit} \quad \vec{E}_0 \perp \vec{e}_z$$

linear polarisiert \leftrightarrow E -Feld schwingt entlang fester Richtung

Transversal polarisiert \leftrightarrow E -Feld schwingt senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (z -Richtung)

Polarisationstypen: **linear, zirkular, elliptisch**

\rightarrow Überlagerung ebener Wellen verschiedener

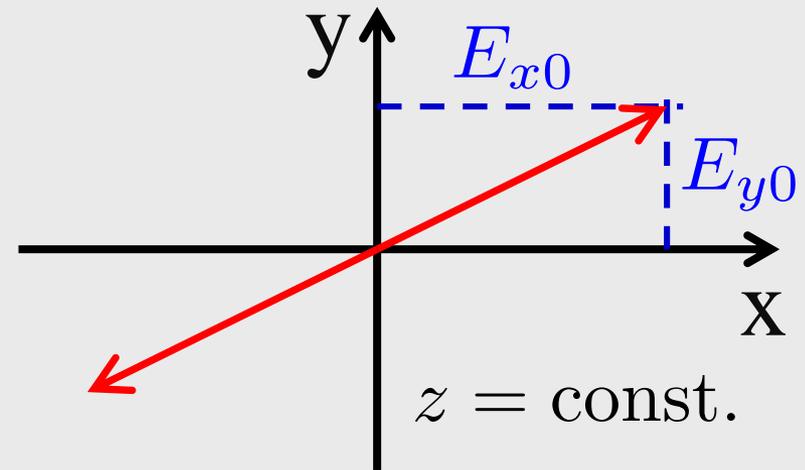
Polarisationsrichtungen, Phasen bzw. Amplituden

(normales Licht: statistische Überlagerung \rightarrow **unpolarisiert**)

Beispiel 1: linear

$$E_x(z, t) = E_{x0} \sin(kz - \omega t)$$

$$E_y(z, t) = E_{y0} \sin(kz - \omega t)$$

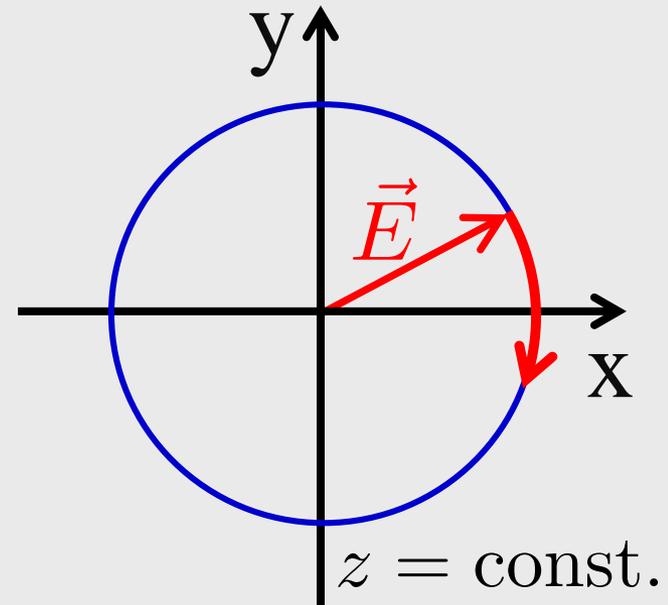


Beispiel 2: zirkular

rechts zirkular

$$E_x(z, t) = E_0 \sin(kz - \omega t)$$

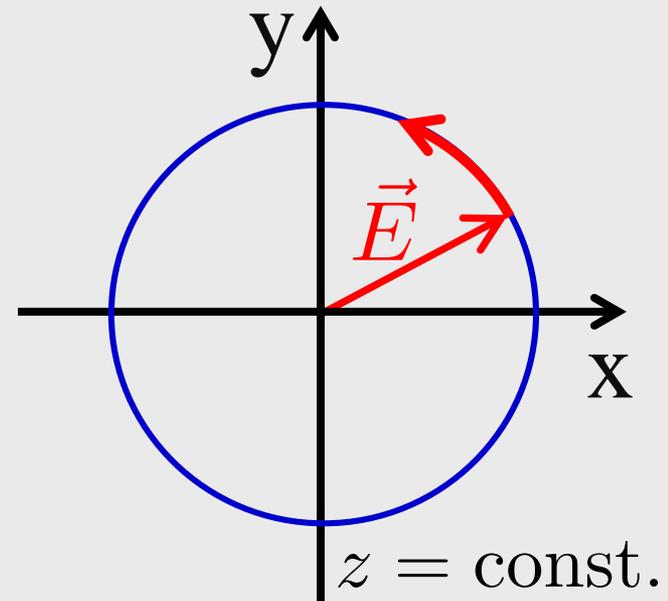
$$\begin{aligned} E_y(z, t) &= E_0 \sin(kz - \omega t + \pi/2) \\ &= E_0 \cos(kz - \omega t) \end{aligned}$$



links zirkular

$$E_x(z, t) = E_0 \sin(kz - \omega t)$$

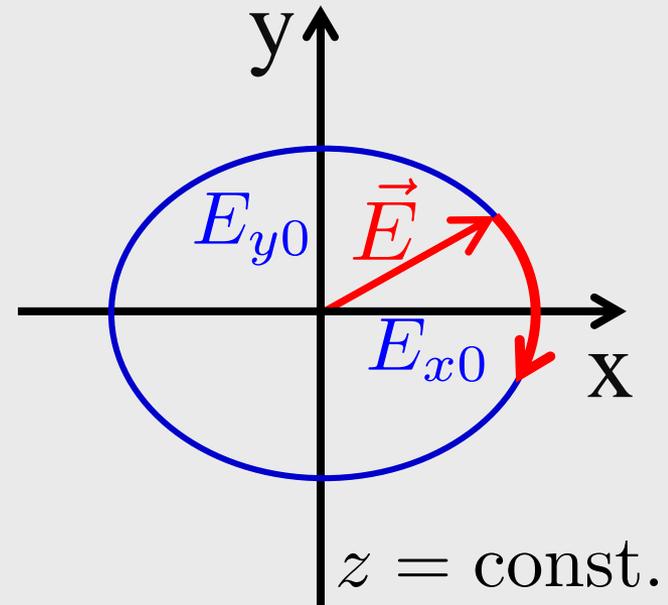
$$\begin{aligned} E_y(z, t) &= E_0 \sin(kz - \omega t - \pi/2) \\ &= -E_0 \cos(kz - \omega t) \end{aligned}$$



Beispiel 3: elliptisch

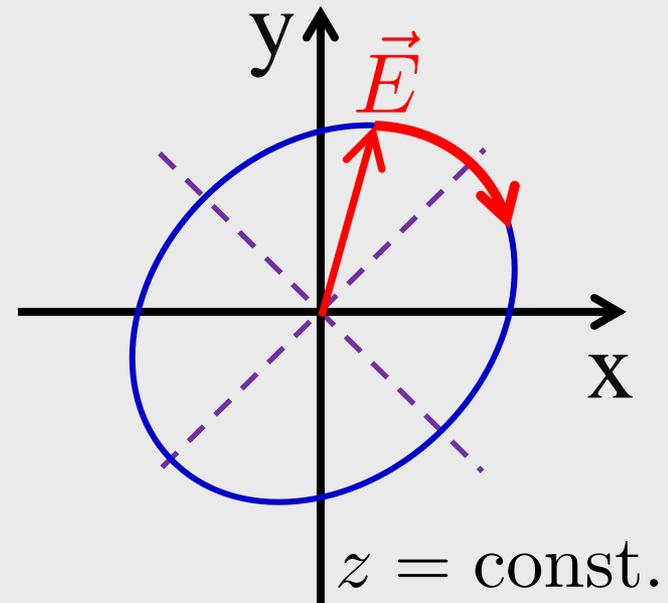
$$E_x(z, t) = E_{x0} \sin(kz - \omega t)$$

$$\begin{aligned} E_y(z, t) &= E_{y0} \sin(kz - \omega t + \pi/2) \\ &= E_{y0} \cos(kz - \omega t) \end{aligned}$$



$$E_x(z, t) = E_0 \sin(kz - \omega t)$$

$$E_y(z, t) = E_0 \sin(kz - \omega t + \varphi)$$



... und Kombinationen hiervon

5.3.4. Magnetfeld elektromagnetischer Wellen

Exemplarisch: linear polarisierte e.m. Welle in z -Richtung

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \vec{e}_x \sin(kz - \omega t)$$

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot } \vec{E} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_0 \sin(kz - \omega t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = E_0 k \vec{e}_y \cos(kz - \omega t)$$

Folgerung für zeitlich veränderlichen (Wellen-)Anteil von B :

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} E_0 k \vec{e}_y \sin(kz - \omega t) = \frac{1}{\omega} k \vec{e}_z \times \vec{E}$$

Allgemein:

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}$$

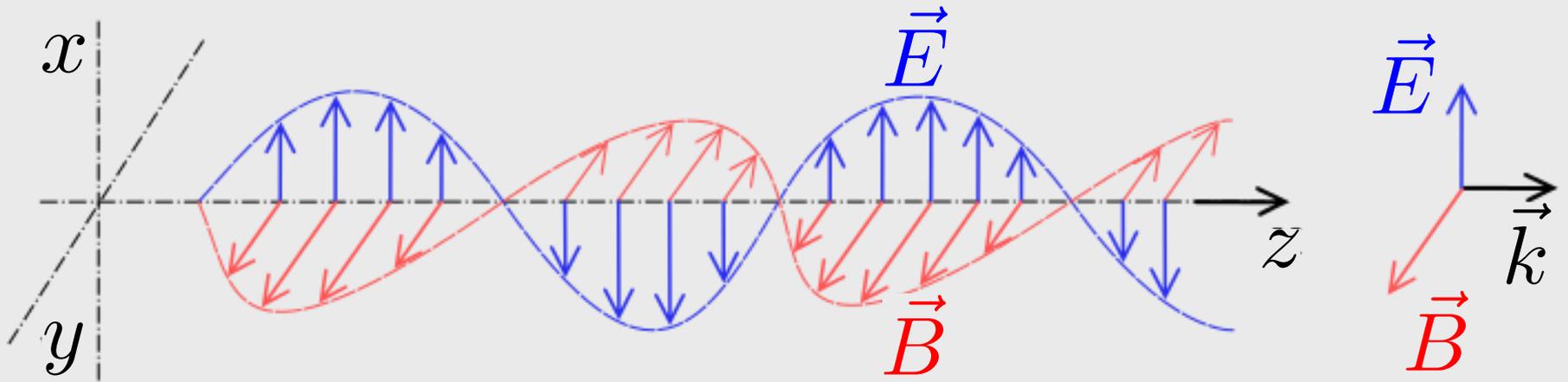
mit \vec{k} = Wellenzahlvektor in Ausbreitungsrichtung

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}$$

$$|\vec{B}| = \frac{k}{\omega} |\vec{E}| = \frac{1}{c} |\vec{E}|$$

$$\vec{E} = \frac{c}{k} \vec{B} \times \vec{k}$$

$$\vec{E} \perp \vec{k} \quad \vec{B} \perp \vec{k} \quad \vec{B} \perp \vec{E}$$



$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t) , \quad \vec{k} = k\vec{e}_z$$

5.3.5. Energietransport durch elektromagnetische Wellen

Energiedichte der ebenen Welle:

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \frac{1}{c^2} \vec{E}^2 \quad c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \quad \epsilon_0 \vec{E}^2$$

Energiestromdichte (Intensität) der Welle: durchströmte Energie pro Sekunde pro Fläche (\square Ausbreitungsrichtung)

$$I = cw = \epsilon_0 c \vec{E}^2$$

Energiestromdichte als Vektor in Flussrichtung:

Poynting-Vektor $\vec{S} = I \vec{e}_k = I \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{|\vec{E} \times \vec{B}|} = \epsilon_0 c \vec{E}^2 \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\vec{E}^2 / c}$

$$\Rightarrow \vec{S} = \epsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Bemerkung: Konzept für beliebige elektromagnetische Felder anwendbar

Energiedichte:

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 = \frac{1}{2} \left(\vec{E} \vec{D} + \vec{B} \vec{H} \right)$$

Energiestromdichte:

$$\vec{S} = \epsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{H}$$

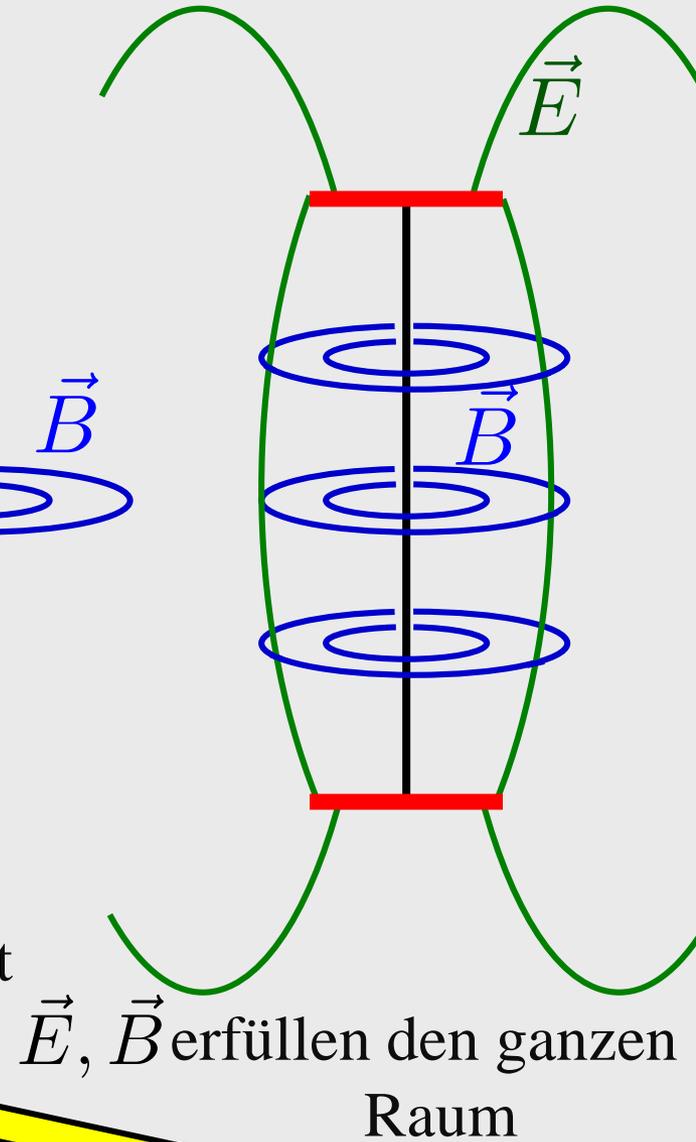
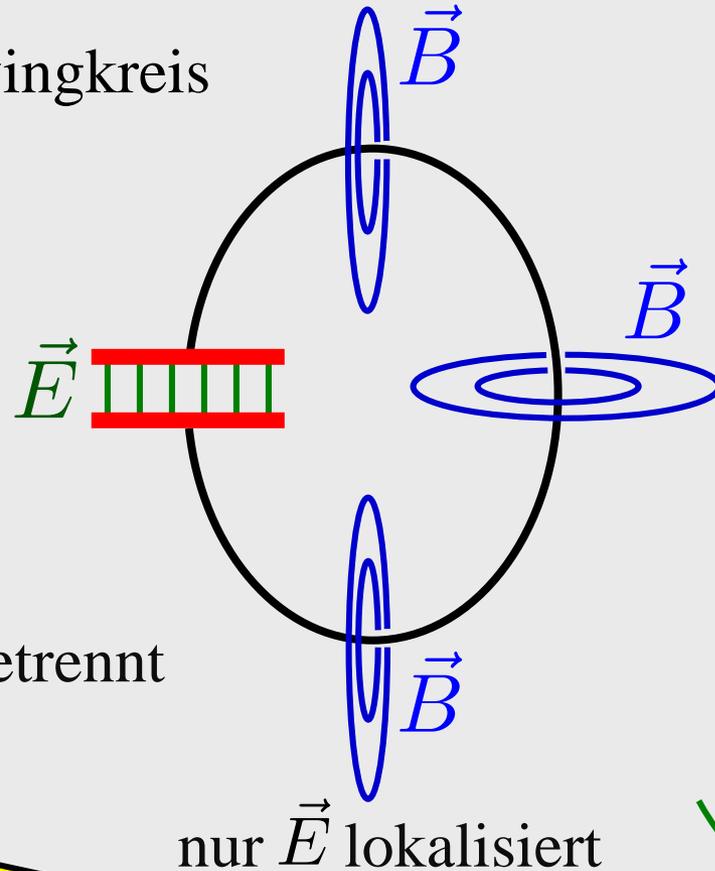
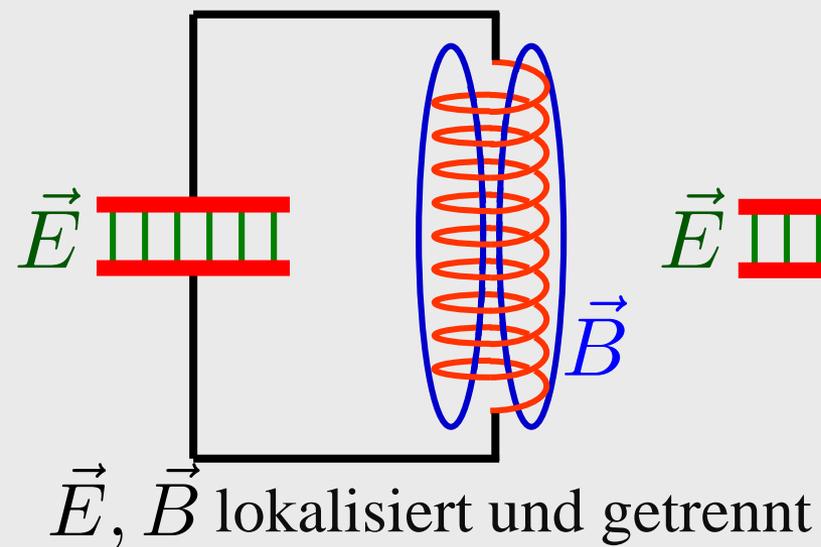
Energieerhaltung (im Vakuum):

$$\operatorname{div} \vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

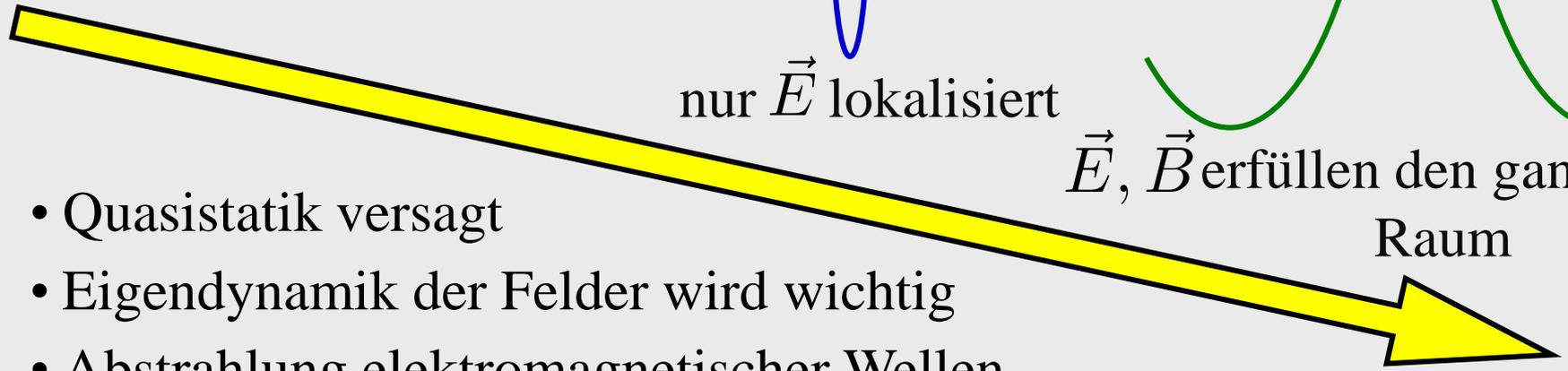
Kontinuitätsgleichung

5.4. Offener Schwingkreis & Hertzscher Dipol

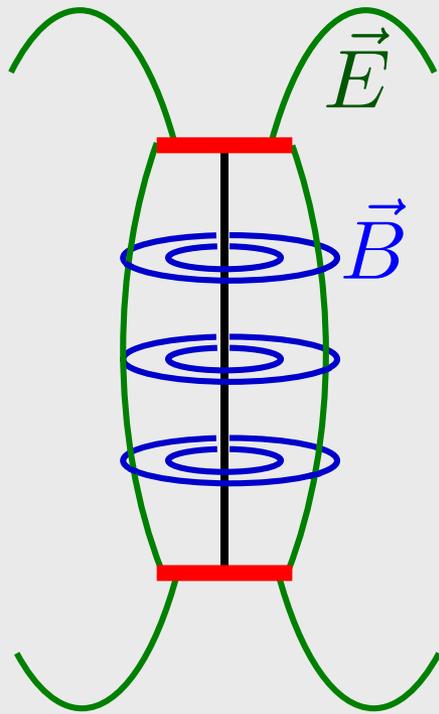
Übergang: offener Schwingkreis



- Quasistatik versagt
- Eigendynamik der Felder wird wichtig
- Abstrahlung elektromagnetischer Wellen



5.4.1. Dipolantenne

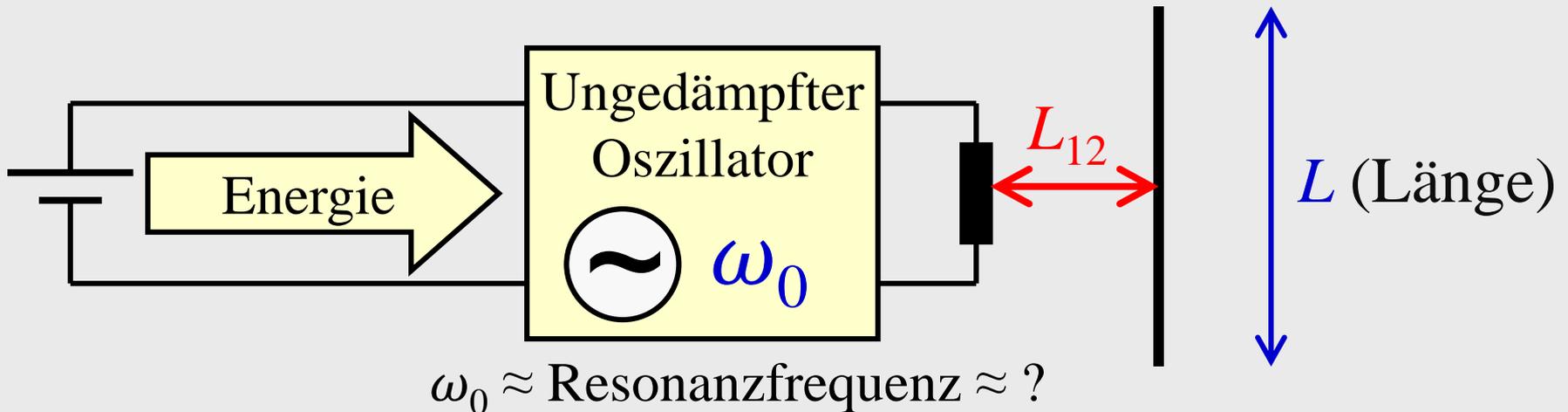


Antenne
(Sender/Empfänger)

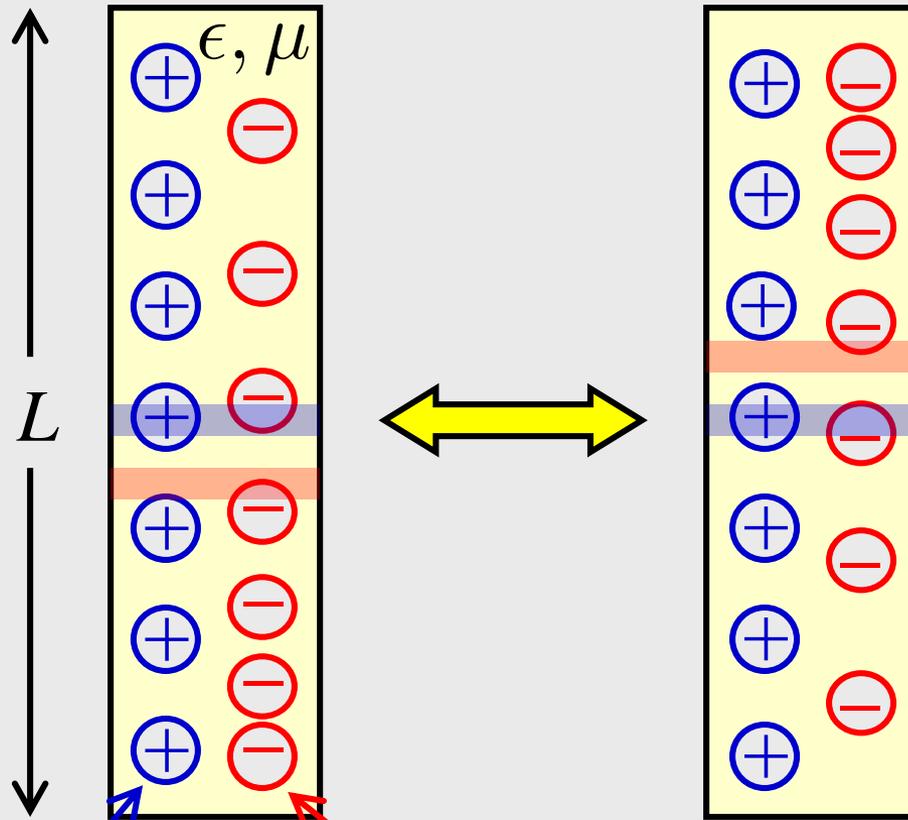


Dämpfung:
1) Ohmscher Widerstand der Antenne
2) Abstrahlung elektromagnetischer Wellen

Sender mit induktiver Energieeinspeisung:



Anschauliches mikroskopisches Modell der Stromschwingung in der Antenne:



Bewegung der Ladungsschwerpunkte \Rightarrow winziger schwingender Dipol

$$p(t) = Qd_0 \sin(\omega t)$$



$$d_0 \ll L$$

$$v(Q) \ll c_{\text{Antenne}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= Qv(t) \\ &= Q\omega d_0 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

feste Ionenrümpfe
(Gesamtladung Q)

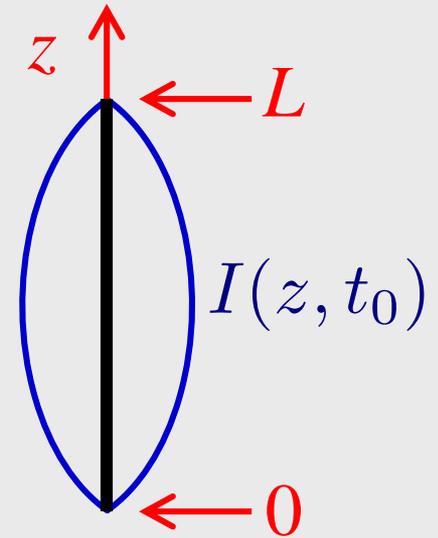
frei bewegliche Elektronen
(Gesamtladung $-Q$)

Stehende Wechselstromwelle:

$$I(z, t) = I_0 \sin(kz) \sin(\omega t)$$

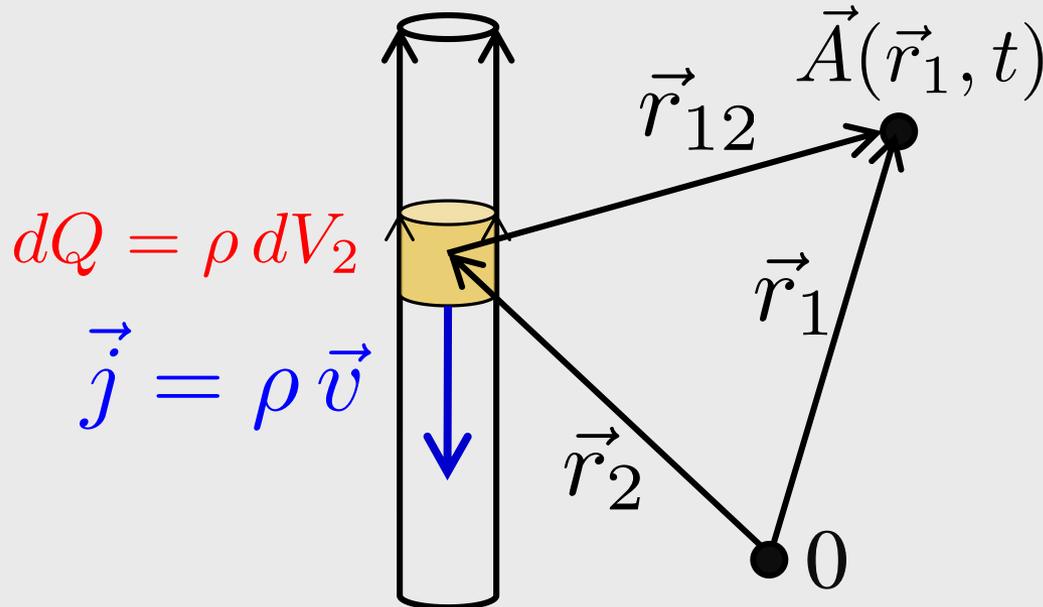
$$= I_0 \sin\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) \sin(\omega t)$$

mit $I(0, t) \equiv I(L, t) \equiv 0$



Erste Resonanz:

$$\lambda = 2L, \quad k = \pi/L, \quad \omega = \pi c_{\text{Antenne}}/L$$



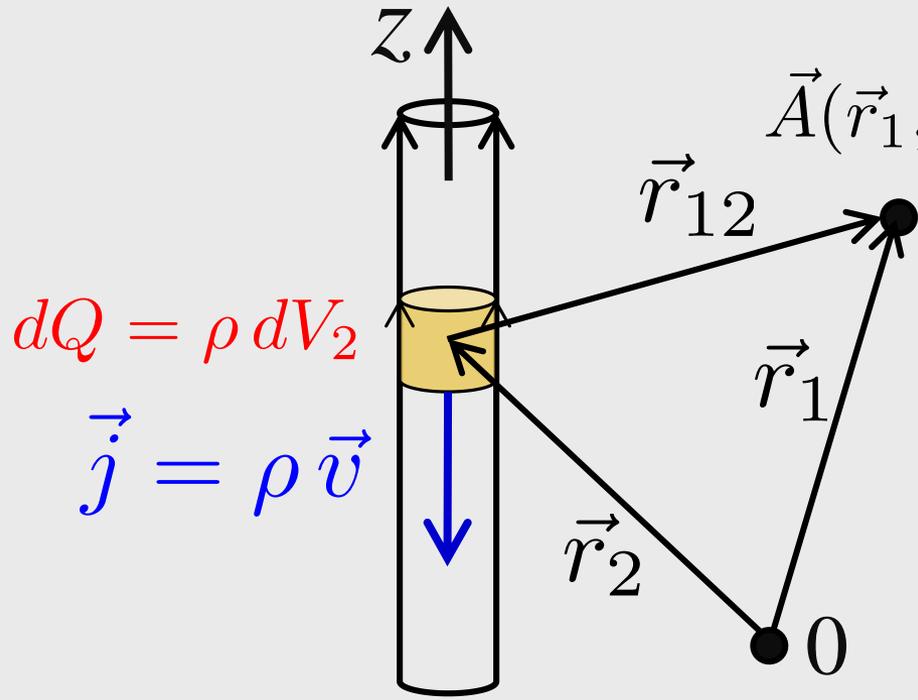
Laufzeit der e.m. Welle
 \Rightarrow Retardierung

$$\vec{j}(\vec{r}_2, t - r_{12}/c)$$



$$\vec{A}(\vec{r}_1, t)$$

5.4.2. Das elektromagnetische Feld des Hertzschen Dipols



$$\vec{A}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}_2, t - r_{12}/c)}{r_{12}} dV_2$$

Mikroskopischer Dipol
am Ursprung:

$$\vec{r}_2 = \vec{0} \quad \vec{r}_{12} \equiv \vec{r} = \vec{r}_1$$

$$\int \vec{j} dV_2 \Rightarrow Q\vec{v} = \dot{\vec{p}}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}}(t - r/c) = \frac{\mu_0}{4\pi} Q\omega d_0 \frac{\cos(\omega(t - r/c))}{r} \vec{e}_z$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} Q\omega d_0 \frac{\cos(\omega t - kr)}{r} \vec{e}_z, \quad \text{mit } k = \omega/c$$

Kugelwelle

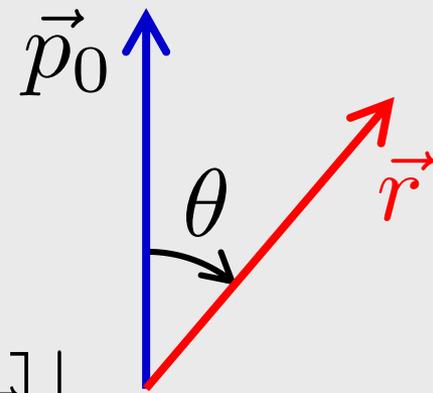
$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot } \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}, -\frac{\partial A_z}{\partial x}, 0 \right)$$

$$= \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} \left[\dot{\vec{p}} \times \vec{r} + \frac{r}{c} \ddot{\vec{p}} \times \vec{r} \right] \Big|_{t-\frac{r}{c}}$$

$$\Rightarrow \vec{B} \perp \dot{\vec{p}}, \quad \vec{B} \perp \vec{r}$$

$\mu_0 \vec{j}$

$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$



Nahfeld
Dynamik der Ströme

$|\vec{B}| \propto r^{-2}$

wichtig nahe Antenne

Fernfeld
Eigendynamik der Felder

$|\vec{B}| \propto r^{-1}$

dominant für $r \gg L$

Die Rechnung (für Enthusiasten):

1

Hilfsformel:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot 2x = \frac{x}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

Retardierte Zeit: $\tau \equiv t - r/c$

$$\vec{p}(\tau) = p(\tau)\vec{e}_z, \quad \dot{\vec{p}}(\tau) = \frac{d\vec{p}(\tau)}{d\tau} = \dot{p}(\tau)\vec{e}_z$$

$$\frac{\partial \vec{p}(\tau)}{\partial x} = \dot{\vec{p}}(\tau) \cdot \frac{d\tau}{dx} = -\dot{\vec{p}}(\tau) \frac{x}{rc}$$

$$\frac{\partial \vec{p}(\tau)}{\partial y} = \dots = -\dot{\vec{p}}(\tau) \frac{y}{rc}, \quad \frac{\partial \vec{p}(\tau)}{\partial z} = \dots = -\dot{\vec{p}}(\tau) \frac{z}{rc}$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\dot{p}(\tau)}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(-\frac{\dot{p}(\tau)}{r^2} \frac{y}{r} - \frac{\ddot{p}(\tau)}{r} \frac{y}{rc} \right)$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left(\dot{p}(\tau) + \frac{r}{c} \ddot{p}(\tau) \right) y$$

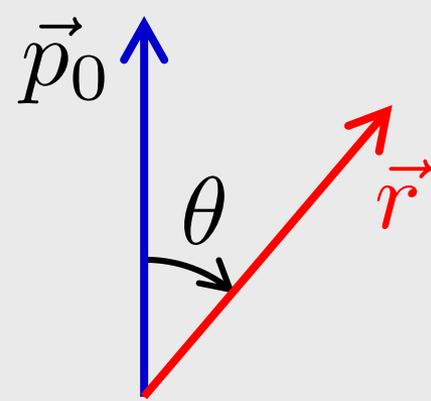
$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = \dots = +\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left(\dot{p}(\tau) + \frac{r}{c} \ddot{p}(\tau) \right) x$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left(\dot{p}(\tau) + \frac{r}{c} \ddot{p}(\tau) \right) \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_z \times \vec{r} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} \left(\dot{\vec{p}}(\tau) \times \vec{r} + \frac{r}{c} \ddot{\vec{p}}(\tau) \times \vec{r} \right)$$

Analoge Rechnung für E -Feld \Rightarrow



$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{nah}} + \vec{E}_{\text{fern}}$$

$$\vec{E}_{\text{fern}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \ddot{\vec{p}})}{r} \Big|_{t-\frac{r}{c}}$$

$$|\vec{E}_{\text{fern}}| = \frac{|\ddot{p}(t - r/c)| \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 \cdot r} = c \cdot |\vec{B}_{\text{fern}}|$$

Nahfeld für $r \rightarrow 0$

$$\vec{E}_{\text{nah}} \propto r^{-3}$$

E, B 90° phasenverschoben

Fernfeld

$$\vec{E}_{\text{fern}} \propto r^{-1} \sin \theta$$

E, B phasengleich

Die Rechnung (für echte Enthusiasten):

1

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{E} = c^2 \text{rot} \int \vec{B} dt$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{rot} \int \frac{\dot{p}(\tau) + \frac{r}{c} \ddot{p}(\tau)}{r^3} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{rot} f(r, t) \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad f(r, t) = \frac{p(\tau)}{r^3} + \frac{\dot{p}(\tau)}{r^2 c}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{3p(\tau)}{r^4} \frac{x}{r} + \frac{\dot{p}(\tau)}{r^3} \left(-\frac{x}{rc}\right) - \frac{2\dot{p}(\tau)}{r^3 c} \frac{x}{r} + \frac{\ddot{p}(\tau)}{r^2 c} \left(-\frac{x}{rc}\right) \\ &= -\frac{3x}{r^5} p(\tau) - \frac{3x}{r^4 c} \dot{p}(\tau) - \frac{x}{r^3 c^2} \ddot{p}(\tau) = -\left(\frac{3f}{r^2} + \frac{\ddot{p}(\tau)}{r^3 c^2}\right) \cdot x \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\left(\frac{3f}{r^2} + \frac{\ddot{p}(\tau)}{r^3 c^2}\right) \cdot y \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\left(\frac{3f}{r^2} + \frac{\ddot{p}(\tau)}{r^3 c^2}\right) \cdot z$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\partial}{\partial y} (0 \cdot f) - \frac{\partial}{\partial z} (x f) \right) = \frac{xz}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3f}{r^2} - \frac{\ddot{p}(\tau)}{r^3 c^2} \right)$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\partial}{\partial z} (-y \cdot f) - \frac{\partial}{\partial x} (0 \cdot f) \right) = \frac{yz}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3f}{r^2} - \frac{\ddot{p}(\tau)}{r^3 c^2} \right)$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\partial}{\partial x} (x \cdot f) - \frac{\partial}{\partial y} (-y f) \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(2f - (x^2 + y^2) \left(\frac{3f}{r^2} - \frac{\ddot{p}(\tau)}{r^3 c^2} \right) \right)$$

$$\stackrel{x^2 + y^2 = r^2 - z^2}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-f - \frac{\ddot{p}(\tau)}{r c^2} + z^2 \left(\frac{3f}{r^2} - \frac{\ddot{p}(\tau)}{r^3 c^2} \right) \right)$$

$$\vec{E} = -\frac{\vec{e}_z}{4\pi\epsilon_0} \left(f + \frac{\ddot{p}(\tau)}{r c^2} \right) + \frac{z\vec{r}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3f}{r^2} + \frac{\ddot{p}(\tau)}{r^3 c^2} \right)$$

Beachte: $z = \vec{r} \cdot \vec{e}_z$, $p(\tau)\vec{e}_z = \vec{p}(\tau)$

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{p}(\tau)}{r^3} + \frac{\dot{\vec{p}}(\tau)}{r^2 c} + \frac{\ddot{\vec{p}}(\tau)}{r c^2} \right) + \frac{\vec{r}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3\vec{r}\vec{p}(\tau)}{r^5} + \frac{3\vec{r}\dot{\vec{p}}(\tau)}{r^4 c} + \frac{\vec{r}\ddot{\vec{p}}(\tau)}{r^3 c^2} \right)$$

$$= \frac{3\vec{r}(\vec{r}\vec{p}) - r^2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^5} + \frac{3\vec{r}(\vec{r}\dot{\vec{p}}) - r^2\dot{\vec{p}}}{4\pi\epsilon_0 c \cdot r^4} + \frac{\vec{r}(\vec{r}\ddot{\vec{p}}) - r^2\ddot{\vec{p}}}{4\pi\epsilon_0 c^2 \cdot r^3}$$

$$\vec{E} = \frac{3\vec{r}(\vec{r}\vec{p}) - r^2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^5} + \frac{3\vec{r}(\vec{r}\dot{\vec{p}}) - r^2\dot{\vec{p}}}{4\pi\epsilon_0 c \cdot r^4} + \frac{\vec{r}(\vec{r}\ddot{\vec{p}}) - r^2\ddot{\vec{p}}}{4\pi\epsilon_0 c^2 \cdot r^3}$$

bac-cab-Regel: $\vec{r} \times (\vec{r} \times \ddot{\vec{p}}) = \vec{r}(\vec{r}\ddot{\vec{p}}) - r^2\ddot{\vec{p}}$

$$\vec{E} = \frac{3\vec{e}_r(\vec{e}_r\vec{p}(\tau)) - \vec{p}(\tau)}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} + \frac{3\vec{e}_r(\vec{e}_r\dot{\vec{p}}(\tau)) - \dot{\vec{p}}(\tau)}{4\pi\epsilon_0 c \cdot r^2} + \frac{\vec{e}_r \times (\vec{e}_r \times \ddot{\vec{p}}(\tau))}{4\pi\epsilon_0 c^2 \cdot r}$$

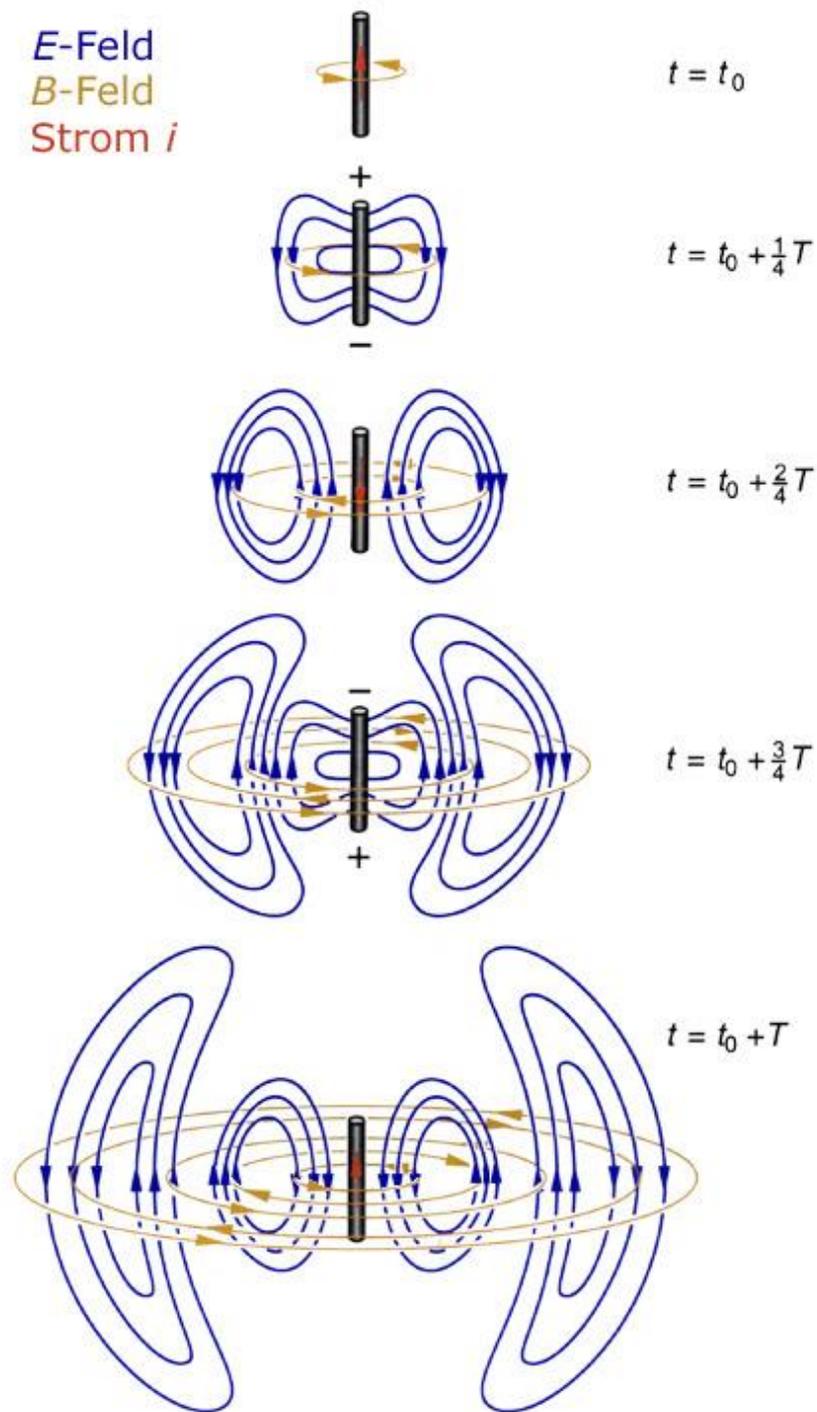
Nahfeld₁ $\propto 1/r^3$
 90° phasenverschoben
 zum *B*-Nahfeld

Nahfeld₂ $\propto 1/r^2$
 in Phase mit
B-Nahfeld

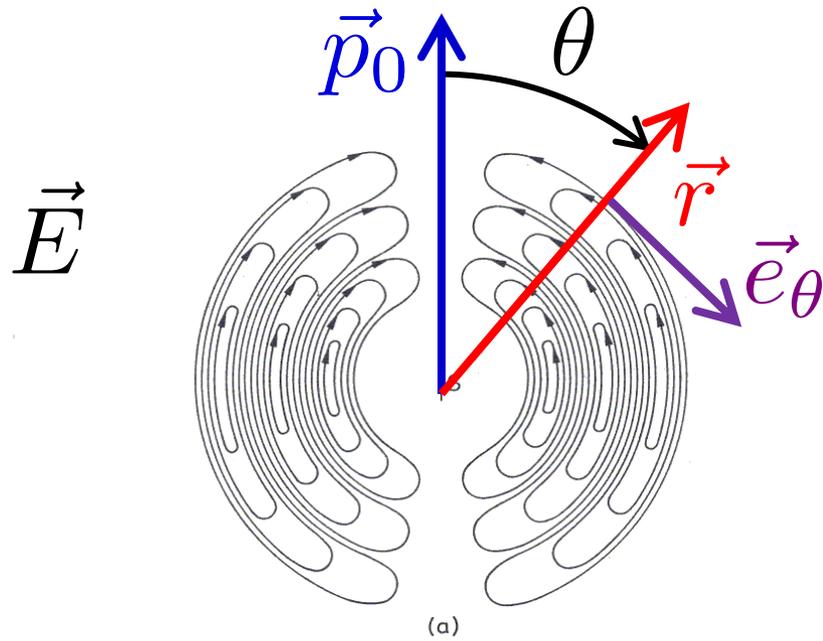
Fernfeld $\propto 1/r$
 in Phase mit
B-Fernfeld

Übergang vom Nah- zum Fernfeld

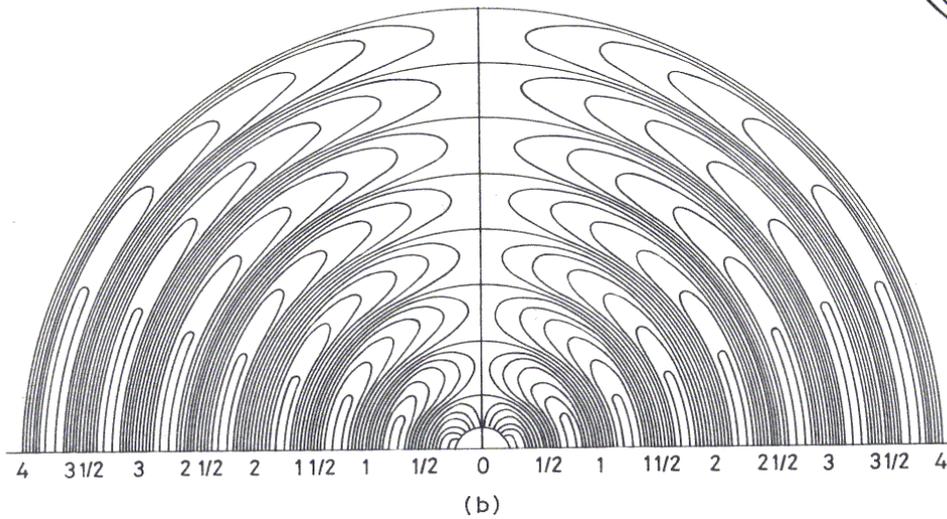
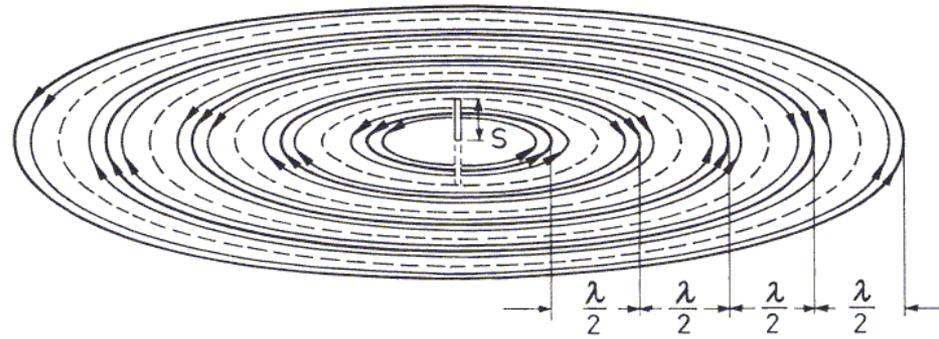
- Abstrahlung $\propto \sin \theta$
(hauptsächlich \square Antenne)
- In großer Entfernung annähernd ebene Welle, linear polarisiert



E - und B -Fernfelder



Polarisation $\parallel \vec{e}_\theta$



5.4.3. Abgestrahlte Leistung

Energiestromdichte:

$$I = |\vec{S}| = \epsilon_0 c E_{\text{fern}}^2 = \epsilon_0 c \left(\frac{\ddot{p}(t - r/c) \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} \right)^2$$

$$p = Q d_0 \sin(\omega t - kr) \equiv p_0 \sin(\omega t - kr)$$

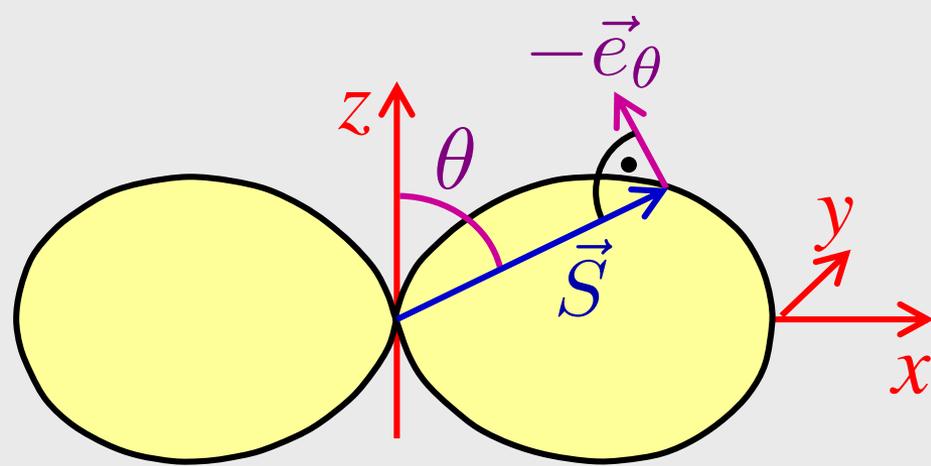
$$\Rightarrow \ddot{p} = -p_0 \omega^2 \sin(\omega t - kr)$$

$$|\vec{S}| = \frac{p_0^2 \omega^4}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \sin^2(\omega t - kr)$$

(zeitlich) mittlere Energiestromdichte:

$$\bar{S} = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$$

$$\bar{S} = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$$



Abstrahlcharakteristik (festes r)

Mittlere Strahlungsleistung (alle Richtungen integriert):

$$\bar{P} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \bar{S} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \cdot 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$

$$= \frac{p_0^2 \omega^4}{16\pi \epsilon_0 c^3} \int_{-1}^1 (1 - u^2) du \quad (\text{mit } u = \cos \theta)$$

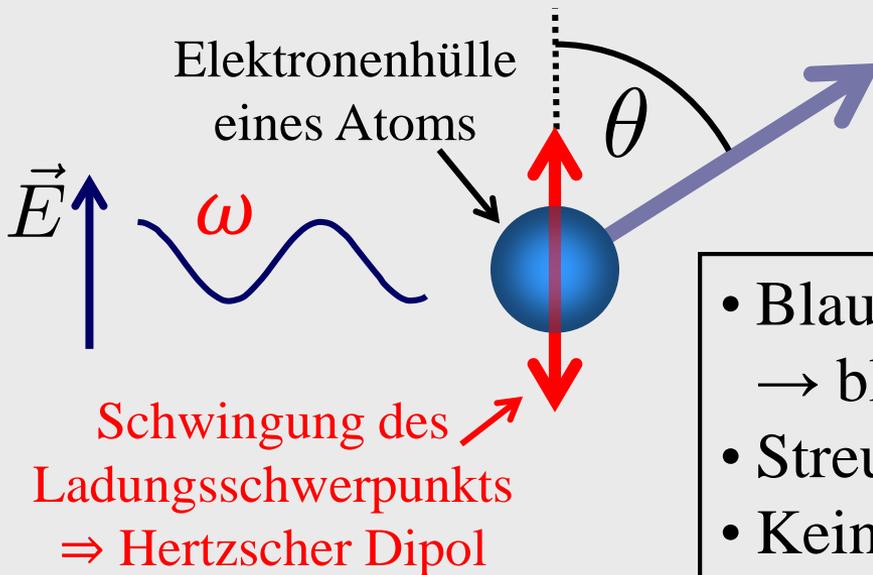
$$= \frac{p_0^2 \omega^4}{16\pi \epsilon_0 c^3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3}$$

Merke:

$$\bar{P} \propto \omega^4$$

Beispiel: Himmelsblau

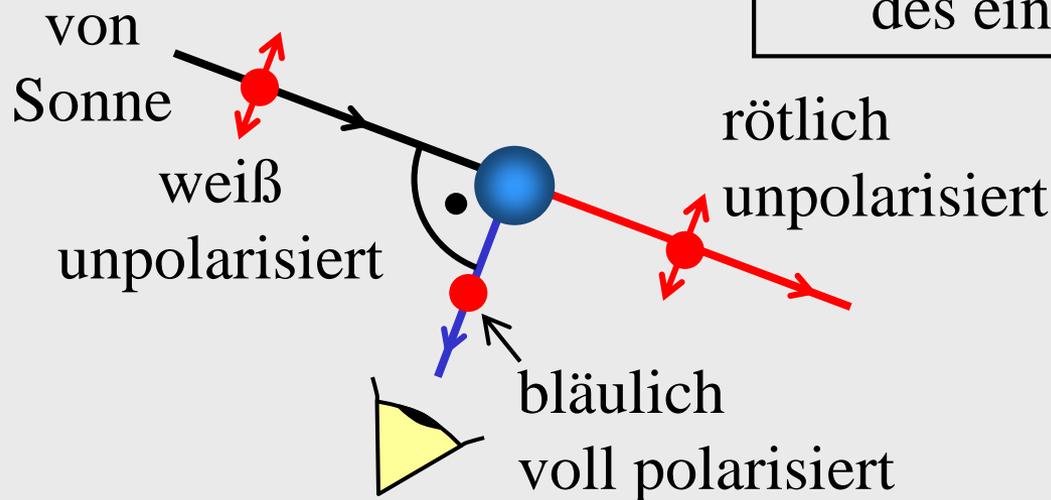
Streuung von Sonnenlicht an N- und O-Atomen der Atmosphäre



Strahlungsintensität des Hertzschen Dipols

$$|\vec{S}| \propto \omega^4 \sin^2 \theta$$

- Blau wird viel stärker gestreut als Rot \rightarrow blauer Himmel
- Streuung azimuthal symmetrisch
- Keine Streuung entlang der Dipolachse \rightarrow keine Streuung entlang des E-Vektors des einfallenden Strahls



Polfilter-Anwendung in Fotografie:

- Abdunklung vom Himmelsblau, dramatische Stimmung
- Veränderung des Farbkontrasts

5.4.4. Strahlungsdämpfung und Frequenzspektrum

Hertzscher Dipol → schwingende Ladungen, Amplitude d_0 , Masse m

Mechanische Energie: $W = \overline{W} = \frac{1}{2} m \omega^2 d_0^2$

Energieverlust durch Strahlung:

$$\dot{\overline{W}} = -\overline{P} = -\frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} = -\frac{Q^2 d_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

$$\Rightarrow \dot{\overline{W}} = -\gamma \overline{W} \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{Q^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 m c^3}$$

⇒ exponentielle Strahlungsdämpfung: $\overline{W}(t) = \overline{W}_0 e^{-\gamma t}$

→ Hertzscher Dipol als gedämpfter harmonischer Oszillator

→ Energiezufuhr durch externe Anregung des Oszillators

Beispiel: Strahlung von angeregtem Atom

$$m = m_e = 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$Q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\lambda \approx 500 \text{ nm}$$

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \approx 3,8 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

$$\gamma = 9 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$$

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = 1,1 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

$$\overline{W}_0 \approx 4 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

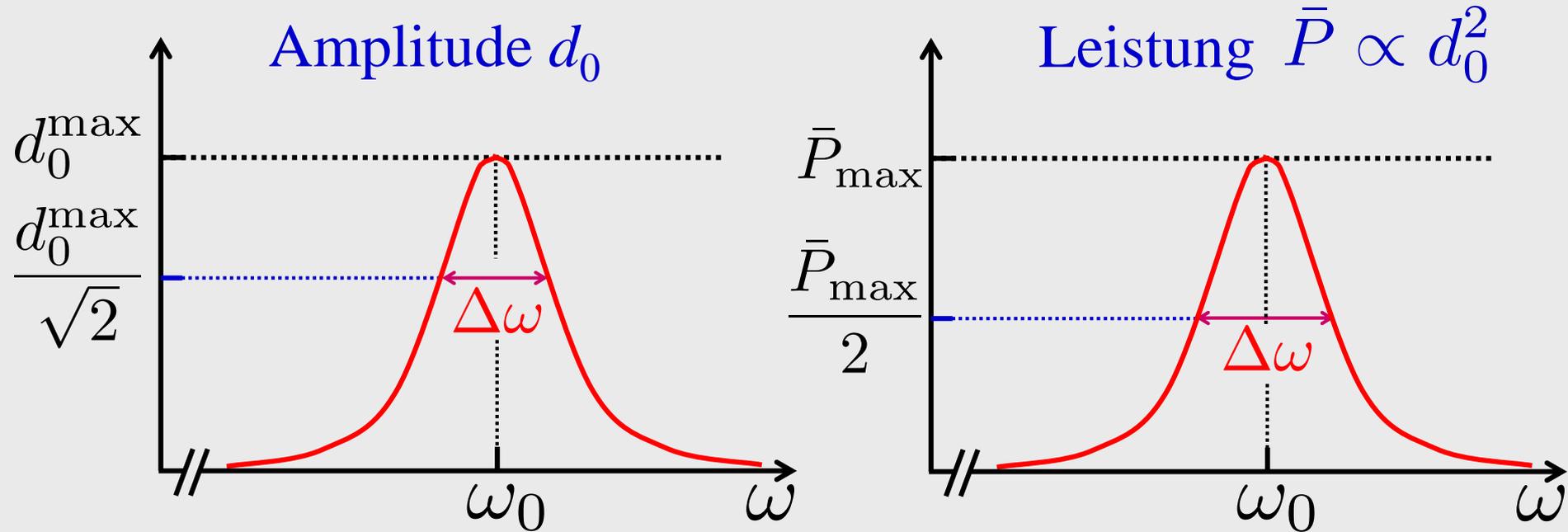
$$d_0 \approx 8 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

$$\left. \frac{d\overline{W}}{dt} \right|_0 = -\gamma \overline{W} \approx -3,6 \cdot 10^{-11} \text{ W}$$

Für 1 Watt Lichtleistung müssen pro Sekunde etwa $3 \cdot 10^{11}$ Atome angeregt werden!

Anregung des gedämpften harmonischen Oszillators

⇒ Resonanzkurve mit Breite $\Delta\omega = \gamma$ (vgl. 4.4.6.)



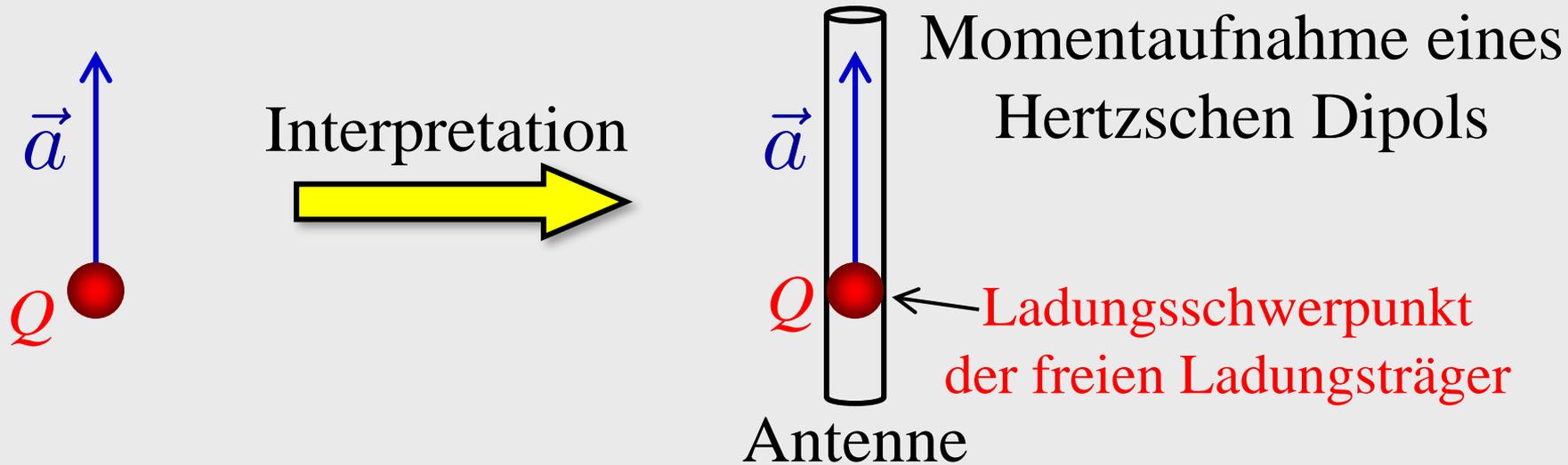
Beispiel: Atomanregung (s.o.)

$$\gamma = 9 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1} \quad \omega_0 = 3,8 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 2,4 \cdot 10^{-8} \quad \text{sehr scharfe Spektrallinie}$$

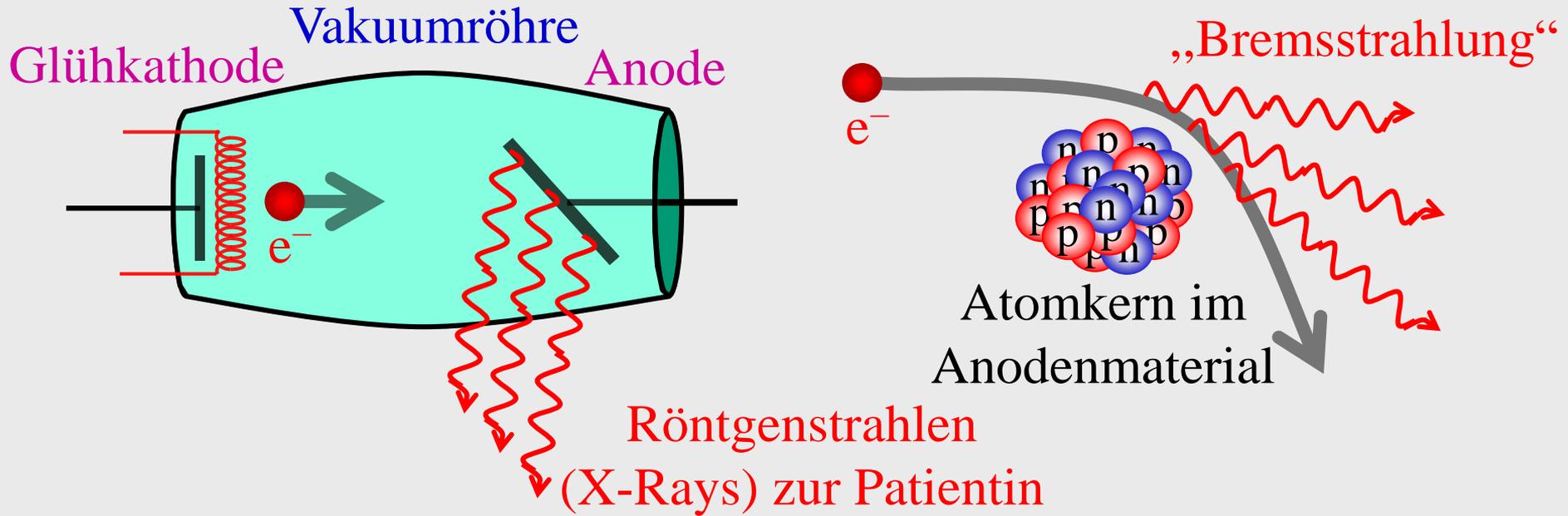
5.4.5. Abstrahlung einer beschleunigten Ladung

$$\vec{E}_{\text{fern}}, \vec{B}_{\text{fern}} \sim \vec{p} \propto \vec{d}_0 = \vec{a}$$

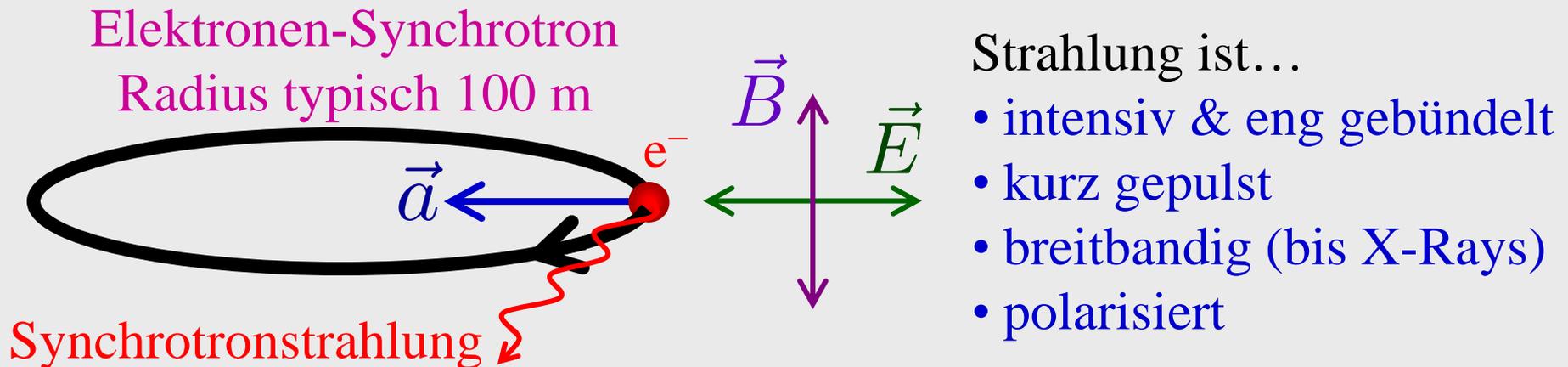


Beschleunigte Ladungen strahlen (in ihrem Ruhesystem) e.m.-Wellen aus (Dipolstrahlung mit Beschleunigungsrichtung als Dipolachse)

Anwendung: Röntgenstrahlung



Anwendung: Synchrotronstrahlung (→ Beispiel: BESSY II)



5.4.6. Das elektromagnetische Spektrum

Frequenz $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ [Hz]

Wellenlänge $\lambda = \frac{c}{\nu}$ [m]

Photon-Energie $E = h\nu = \hbar\omega$ [eV]

Plancksches Wirkensquatum

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} , \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Photon = elementares Feldquant des e.m. Feldes

Sichtbares Licht: 400 nm (Violett) ... 700 nm (Rot)

kosmische Gammastrahlung:

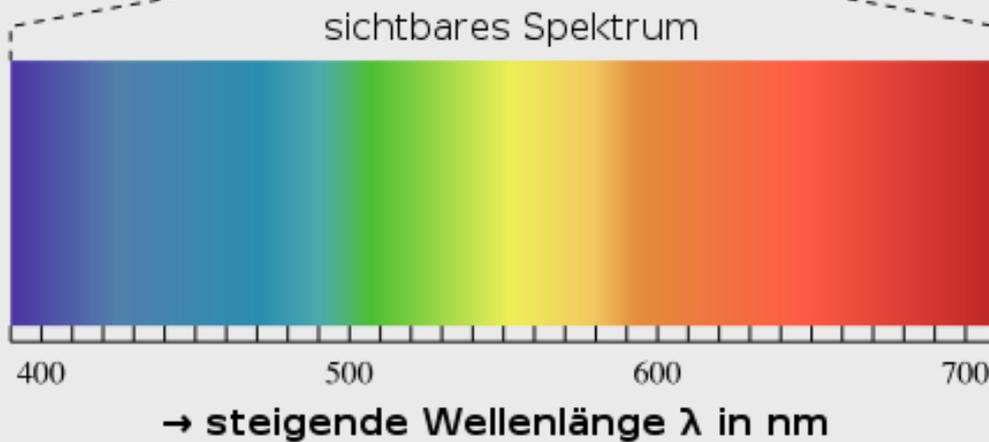
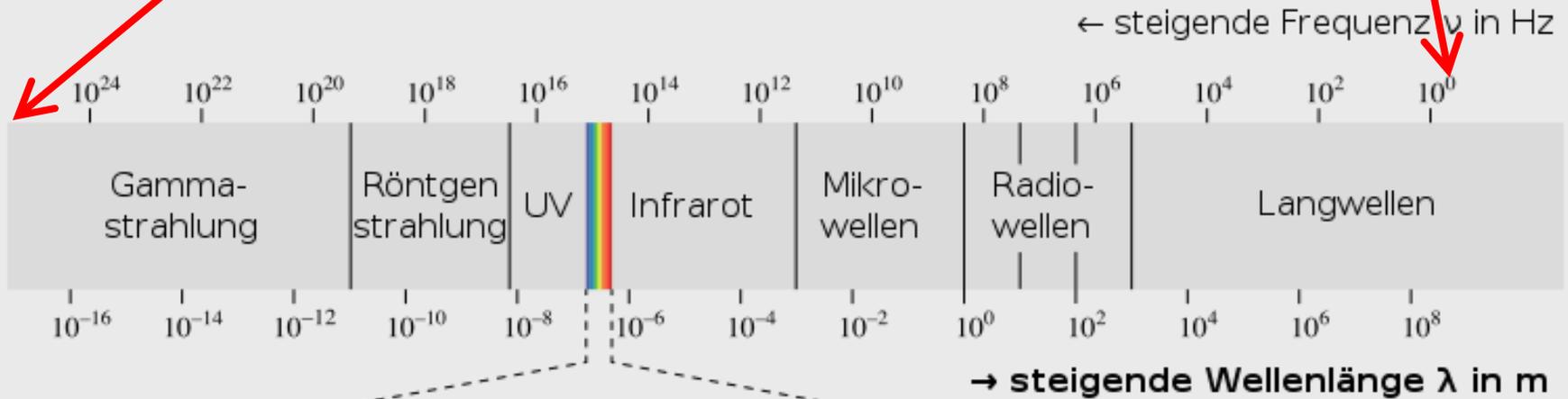
$$E_\gamma \lesssim 10^{14} \text{ eV} \approx 100 \text{ TeV}$$

$$\lambda \gtrsim 10^{-20} \text{ m}$$

Ultralangwelle:

$$\nu \approx 1 \text{ Hz}$$

$$\lambda \approx 300000 \text{ km}$$



Sichtbares Licht
(nur eine Oktave)