

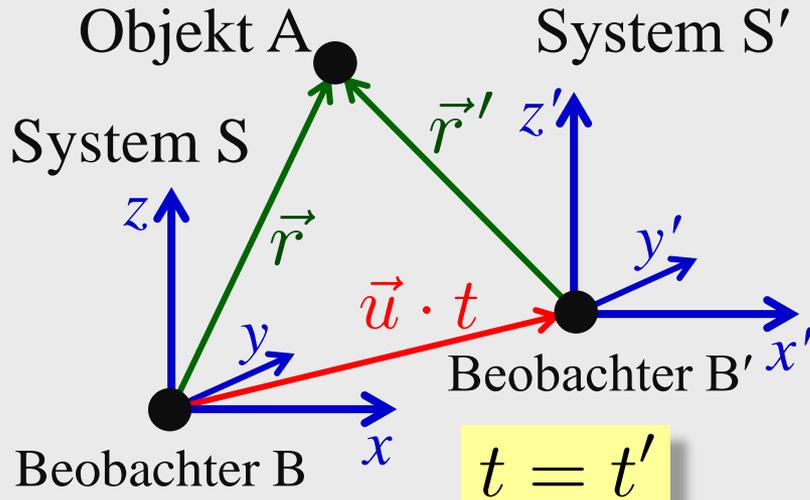
# 6. Spezielle Relativitätstheorie

## 6.1. Inertialsysteme und Gallilei-Transformation

### Newton:

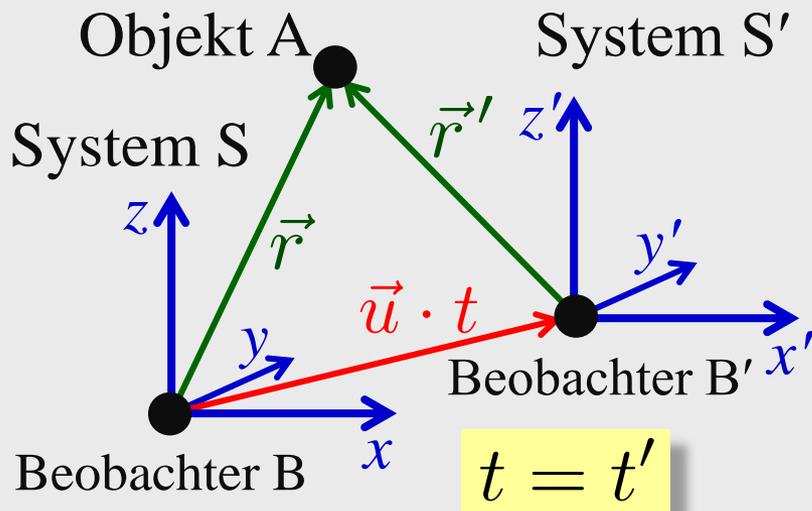
- Es gibt einen absolut ruhenden Raum  $\leftrightarrow$  **Weltäther**
- Es gibt eine absolute (universelle) Zeit
- Gleichförmig im Weltäther bewegt  $\leftrightarrow$  **Inertialsysteme**
- Bewegungsgleichung in Inertialsystemen:  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

Wechsel Inertialsystem: Relativgeschwindigkeit  $\vec{u} = \text{const.}$



### Galilei-Transformation

$$\begin{aligned}\vec{r}'(t') &= \vec{r}'(t) \\ &= \vec{r}(t) - \vec{u} \cdot t\end{aligned}$$



## Galilei-Transformation

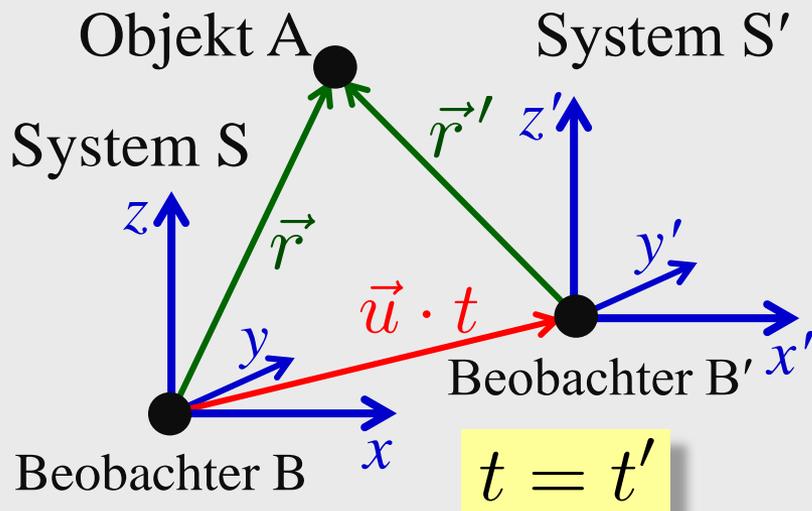
$$\begin{aligned}\vec{r}'(t') &= \vec{r}'(t) \\ &= \vec{r}(t) - \vec{u} \cdot t\end{aligned}$$

Geschwindigkeit von A:

$$\left. \begin{array}{l} S : \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \\ S' : \quad \vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d\vec{r}'}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}' = \frac{d}{dt}(\vec{r} - \vec{u}t) = \vec{v} - \vec{u}$$

Beschleunigung von A:

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt'} = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v} - \vec{u}) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$$



## Galilei-Transformation

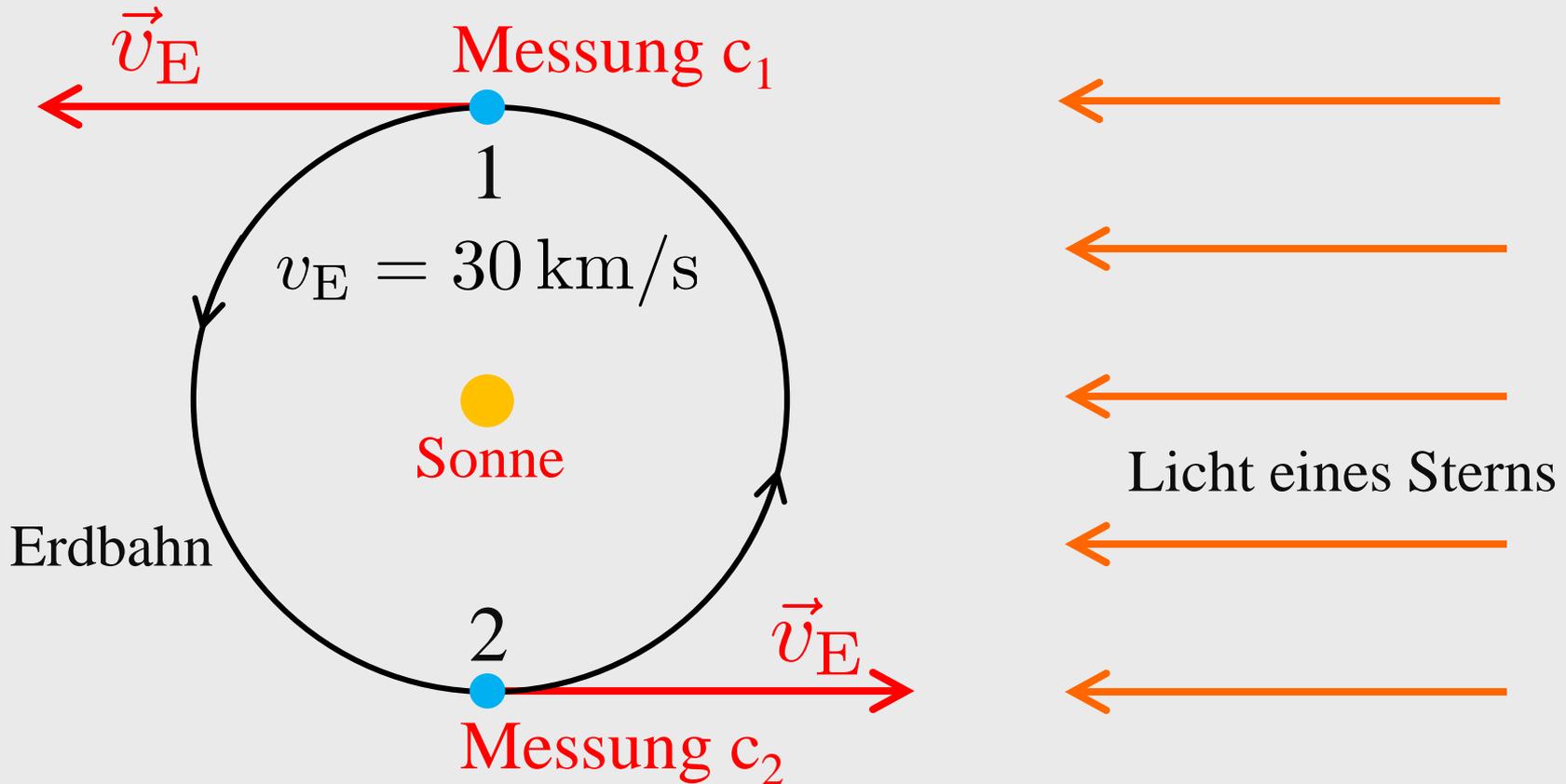
$$\begin{aligned}\vec{r}'(t') &= \vec{r}'(t) \\ &= \vec{r}(t) - \vec{u} \cdot t\end{aligned}$$

## Folgerungen:

- Beschleunigungen (und Kräfte) identisch in S und S'
- Es ist unmöglich zu entscheiden welches System ruht oder sich bewegt
- In verschiedenen Inertialsystemen haben die physikalischen Gesetze (Bewegungsgleichungen) dieselbe Form

## 6.2. Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Ätherhypothese  $\Rightarrow$  Lichtgeschwindigkeit  $c$  ist abhängig vom Inertialsystem

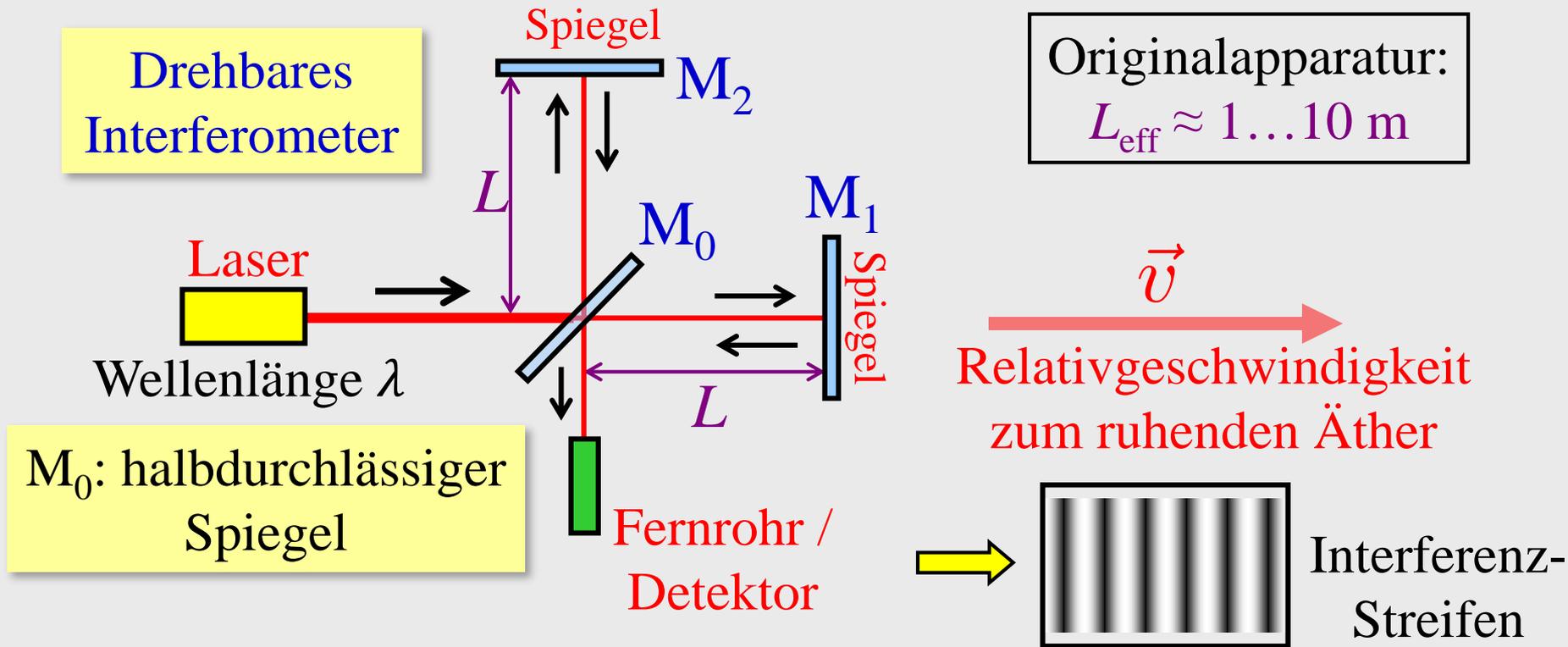


Erwartung:  $c_2 - c_1 = 2v_E$

Beobachtung:  $c_1 = c_2 \equiv c$

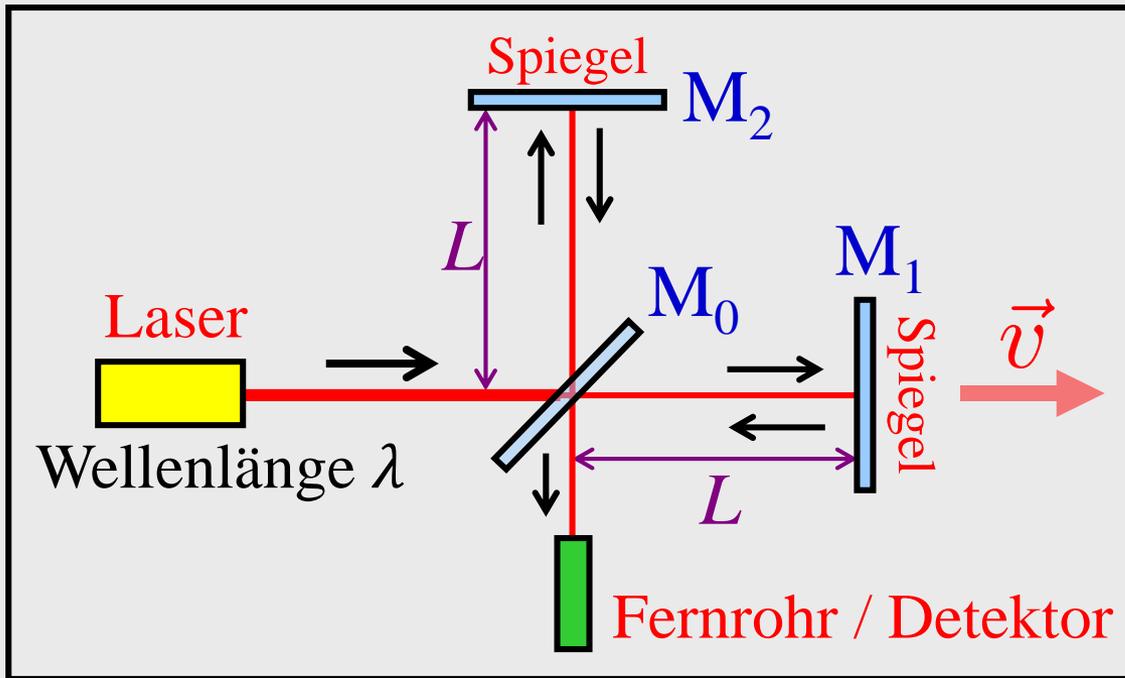
Äther existiert nicht!

# Ende der Ätherhypothese: Das Michelson-Morley-Experiment



**Vorhersage (Newton):** Interferenzstreifen verschieben sich bei Drehung

**Vorhersage (Einstein):** Interferenzstreifen unabhängig von Orientierung



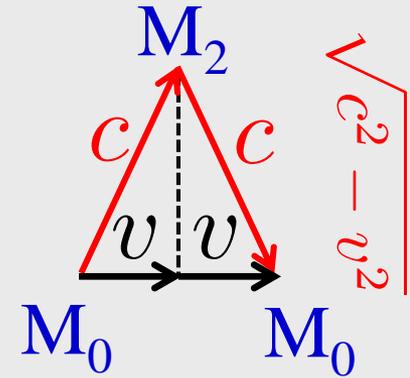
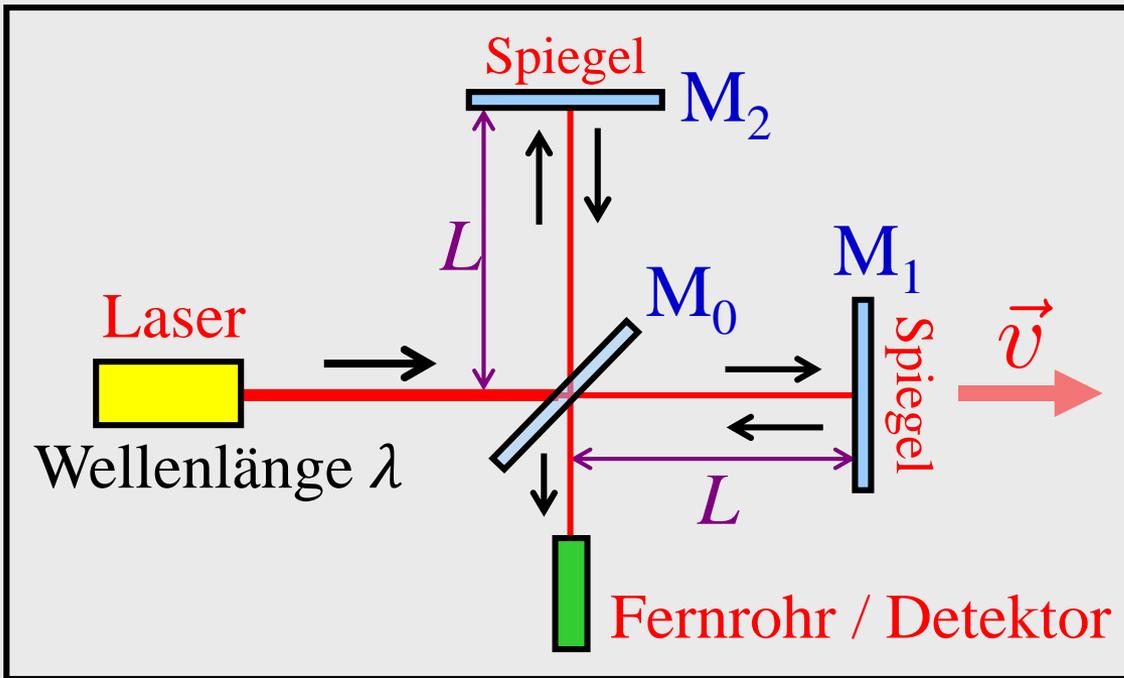
$$M_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{c-v} \\ \xleftarrow{c+v} \end{array} M_1$$

$$M_0 - M_1 - M_0: T_1 = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} = 2\gamma^2 \frac{L}{c}$$

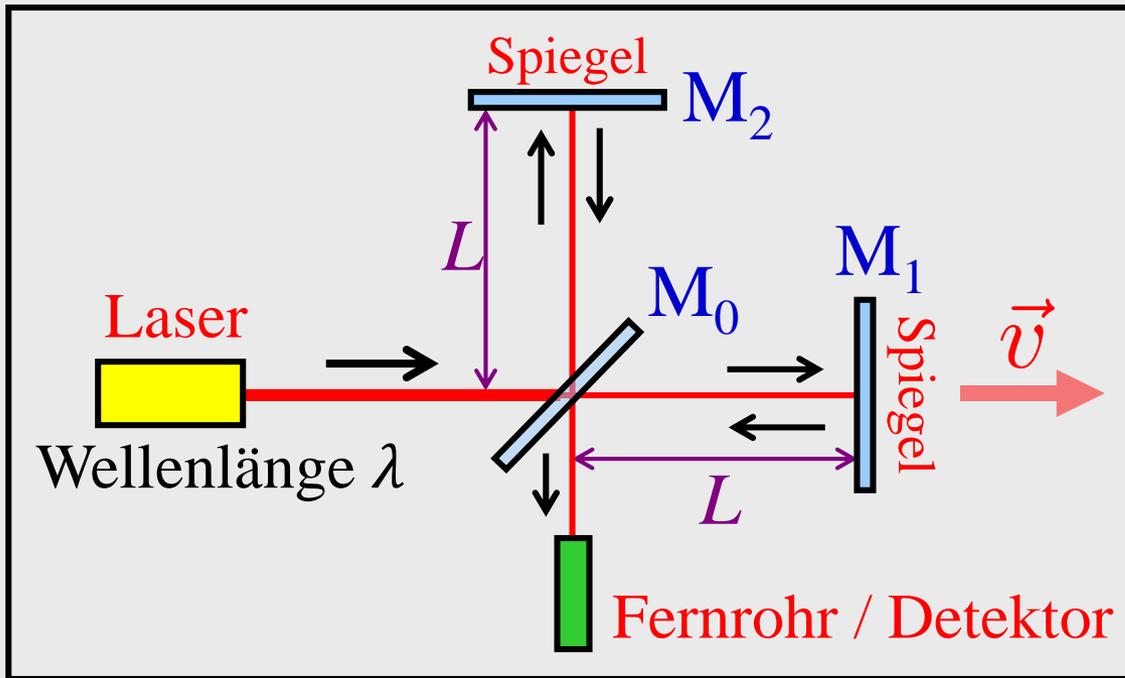
mit Bezeichnung:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$$



$$M_0 - M_2 - M_0: \quad T_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = 2\gamma \frac{L}{c}$$



$$M_0 - M_1 - M_0:$$

$$T_1 = 2\gamma^2 \frac{L}{c}$$

$$M_0 - M_2 - M_0:$$

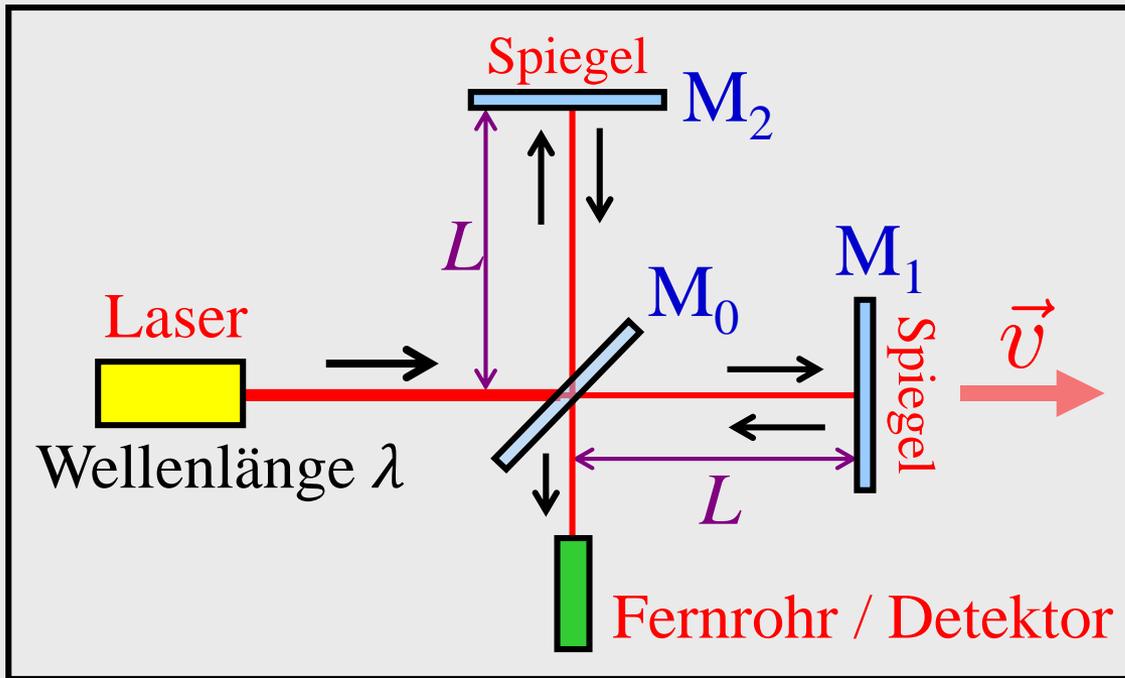
$$T_2 = 2\gamma \frac{L}{c}$$

Laufzeitdifferenz:  $T_{12} = T_1 - T_2 = 2\gamma(\gamma - 1) \frac{L}{c}$

Nach Drehung um  $90^\circ$ :  $T_{21} = -T_{12}$

Verschiebung der Laufzeitdifferenz bei Drehung:

$$\Delta T = T_{12} - T_{21} = 4\gamma(\gamma - 1) \frac{L}{c}$$



$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$$

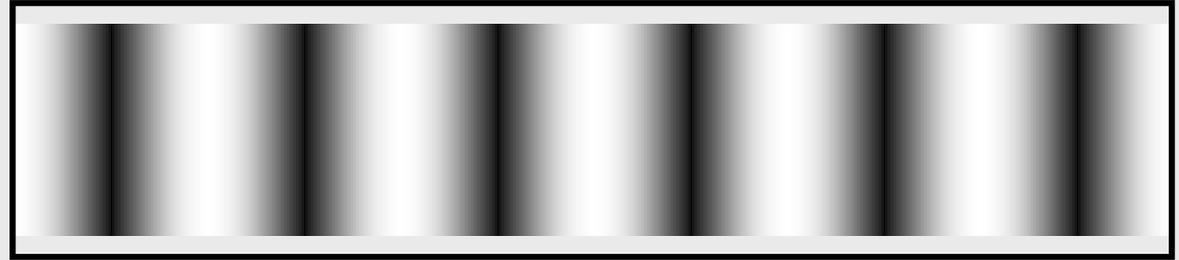
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$v \ll c \Rightarrow \gamma \approx 1 + \frac{\beta^2}{2} \Rightarrow \gamma(\gamma - 1) \approx \frac{\beta^2}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta T = 4\gamma(\gamma - 1) \frac{L}{c} \approx 2\beta^2 \frac{L}{c}$$

## Interferenzstreifen

$$\Delta T \approx 2\beta^2 \frac{L}{c}$$



Interferenzmuster wandert um  $N$  Streifenbreiten, mit:

$$N = \frac{\Delta T}{\textcircled{T}} = \Delta T \cdot \textcircled{\nu} = \frac{c \cdot \Delta T}{\textcircled{\lambda}} \approx 2\beta^2 \frac{L}{\lambda}$$

Periode                      Frequenz                      Wellenlänge

Zahlen für Originalapparatur (Beobachtung über ein volles Jahr):

$$v \geq 30 \text{ km/s}$$

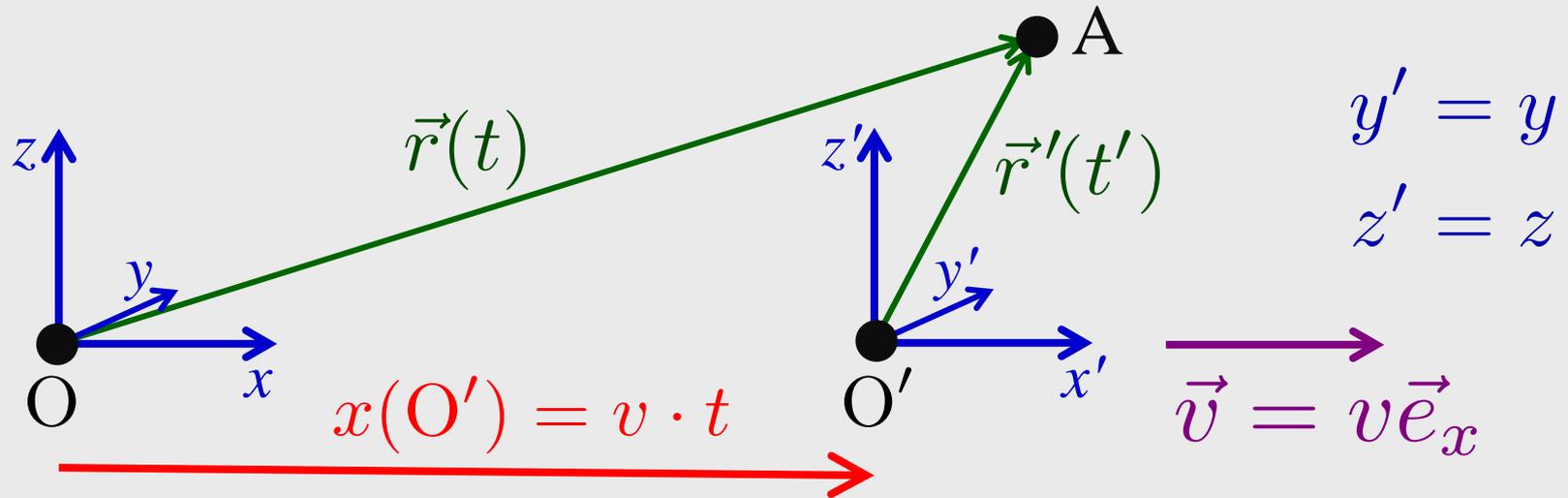
$$\lambda = 500 \text{ nm}, \quad L \approx 10 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \beta \geq 1 \cdot 10^{-4}, \quad N \geq 0,4$$

Beobachtung negativ  $\Rightarrow$  Ende der Ätherhypothese

## 6.3. Lorentz-Transformation

Ab jetzt: Relativgeschwindigkeit  $v$  entlang  $x$ -Achse:



Identische Uhren in  $O$  und  $O'$ , synchronisiert bei  $O = O'$

$$O = O' \Leftrightarrow t = t' = 0$$

Galilei-Transformation

$$x' = x - vt$$

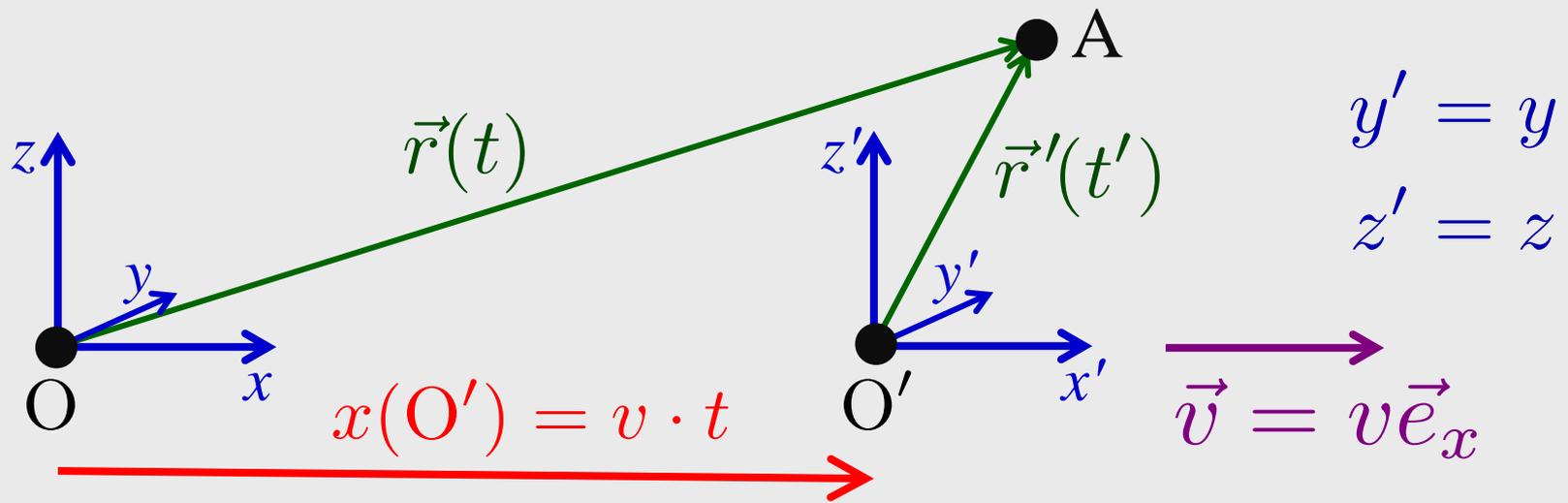
$$t' = t$$



Ansatz: lineare Transformation

$$x' = ax + bt$$

$$t' = Ax + Bt$$



Galilei-Transformation

$$x' = x - vt$$

$$t' = t$$

Ansatz: lineare Transformation

$$x' = ax + bt$$

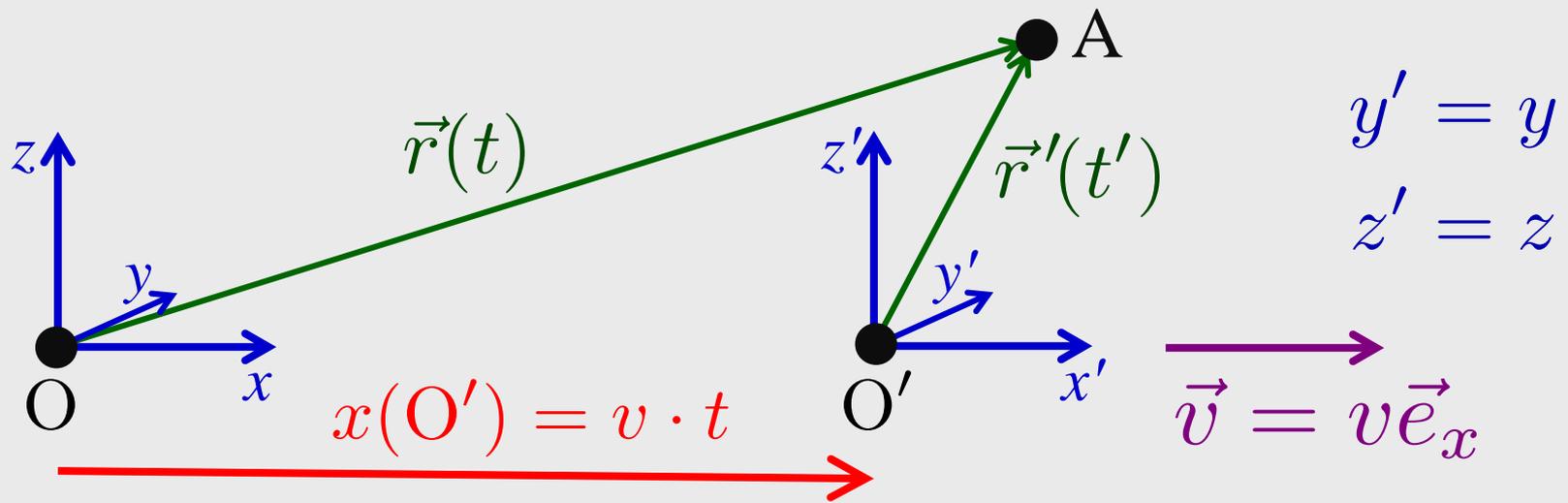
$$t' = Ax + Bt$$



$$\left. \begin{array}{l} x(O') = v \cdot t \\ x'(O') \equiv 0 \end{array} \right\} \Rightarrow avt + bt \equiv 0 \Rightarrow b = -av$$

$$x' = a(x - vt)$$

$$t' = Ax + Bt$$



$$x' = a(x - vt)$$

$$a = a(v)$$

$$t' = Ax + Bt$$

$$A = A(v)$$

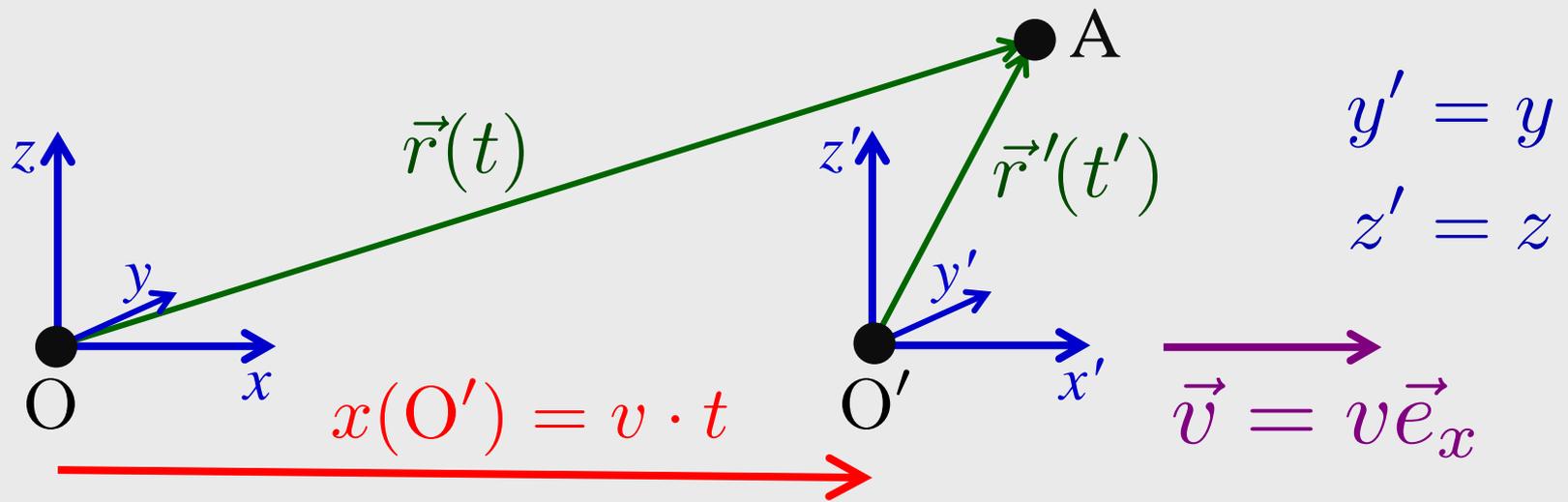
$$B = B(v)$$

Differenz zweier Koordinaten bei festem  $t$ :

$$\Delta x'|_t = a(v) \Delta x|_t$$

Nach Spiegelung der  $x$ -Achsen:

$$- \Delta x'|_t = a(-v) \cdot (- \Delta x|_t) \quad \Rightarrow \quad a(v) = a(-v) \equiv a$$



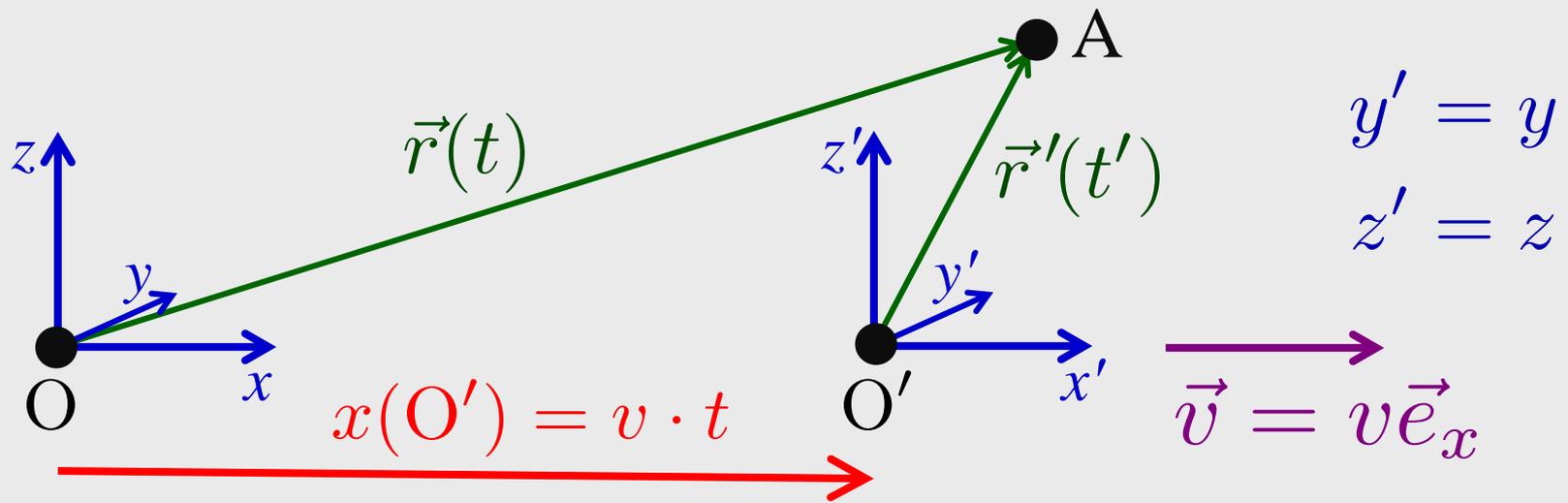
$$x' = a(x - vt)$$

$$t' = Ax + Bt$$

$$a(v) = a(-v) \equiv a$$

Im gleichberechtigten Inertialsystem  $O'$  muss sich dasselbe Ergebnis ergeben – mit invertierter Geschwindigkeit  $\Rightarrow$

$$x = a(-v) (x' + vt') = a(v) (x' + vt') = a (x' + vt')$$



$t = t' = 0$  : Lichtblitz aus  $O = O'$  in  $x$ -Richtung

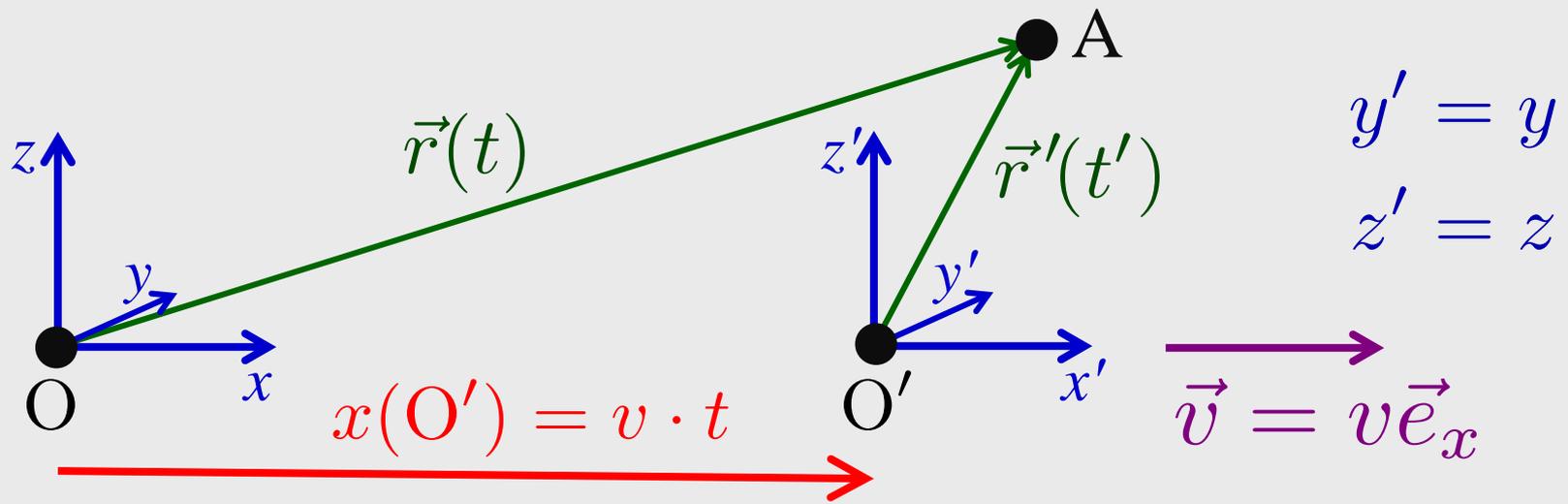
Lichtgeschwindigkeit  $c$  ist in allen Systemen gleich  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 x &= ct & x' &= a(x - vt) & = a(x - \beta x) \\
 x' &= ct' & x &= a(x' + vt') & = a(x' + \beta x')
 \end{aligned}$$

$\beta = \frac{v}{c}$

$$\Rightarrow xx' = a^2(1 - \beta^2)xx' \Rightarrow a = \pm\gamma$$

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$



$$\begin{aligned} x' &= a(x - vt) \\ t' &= Ax + Bt \end{aligned}$$

$$a = \pm \gamma$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

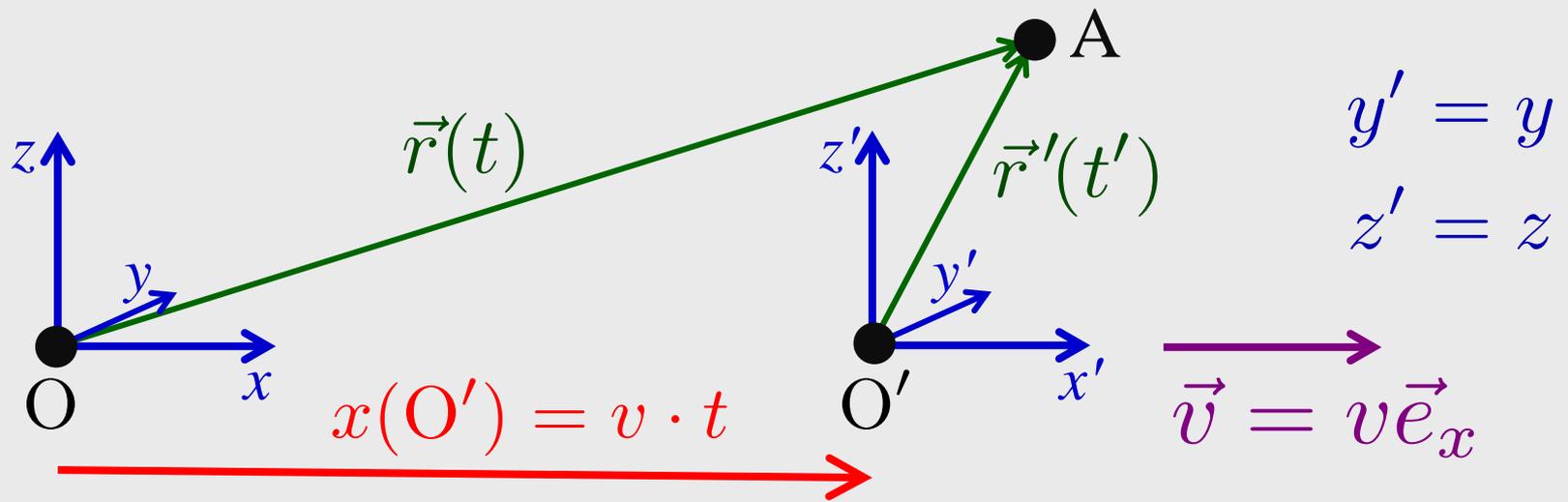
$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$v = 0 \Rightarrow x' \equiv x, \text{ also } a = +\gamma$$

$$\Rightarrow x = \gamma(x' + vt') = \gamma^2(x - \beta ct) + \gamma \beta ct'$$

$$t' = \frac{1 - \gamma^2}{\gamma \beta c} x + \gamma t = -\frac{\gamma^2 \beta^2}{\gamma \beta c} x + \gamma t$$

$$\Rightarrow A = -\gamma \beta / c, \quad B = \gamma \quad \text{Beachte: } \gamma^2 - 1 = \gamma^2 \beta^2$$

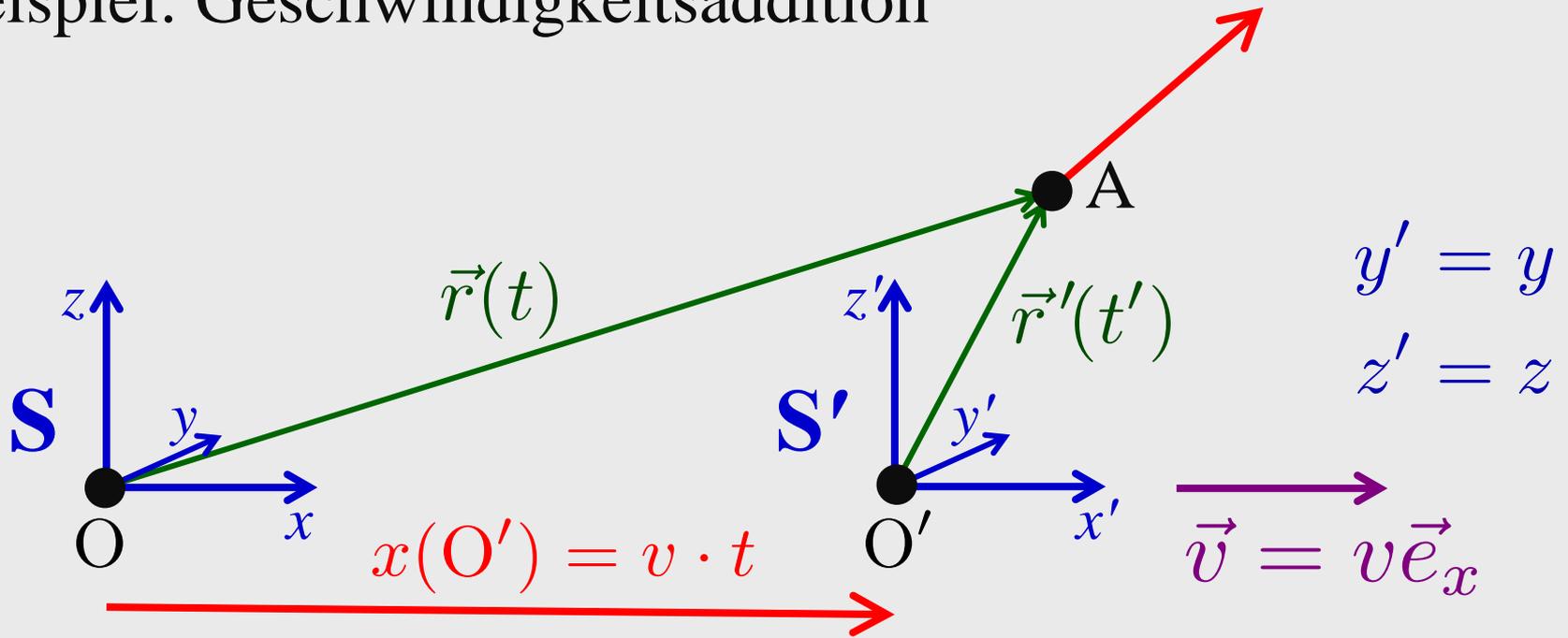


Lorentz-Transformation:

$$\begin{aligned}
 x' &= \gamma(x - \beta ct) & x &= \gamma(x' + \beta ct') \\
 ct' &= \gamma(ct - \beta x) & ct &= \gamma(ct' + \beta x')
 \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

# Beispiel: Geschwindigkeitsaddition



Geschwindigkeit von A in S:  $\vec{u} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$

Geschwindigkeit von A in S':  $\vec{u}' = \left( \frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'} \right)$

$$dx' = \gamma(dx - v dt)$$

$$dy' = dy$$

$$dz' = dz$$

$$dt' = \gamma(dt - (v/c^2)dx)$$

$$x' = \gamma(x - \beta ct)$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - v dt}{dt - \frac{v}{c^2} dx} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma \left( dt - \frac{v}{c^2} dx \right)} = \frac{u_y}{\gamma \left( 1 - \frac{u_x v}{c^2} \right)}$$

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma \left( dt - \frac{v}{c^2} dx \right)} = \frac{u_z}{\gamma \left( 1 - \frac{u_x v}{c^2} \right)}$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}, \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}, \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}$$

Spezialfall 1:  $u_x = c, u_y = u_z = 0$

$$u'_x = \frac{c - v}{1 - \frac{cv}{c^2}} = c, \quad u'_y = u'_z = 0$$

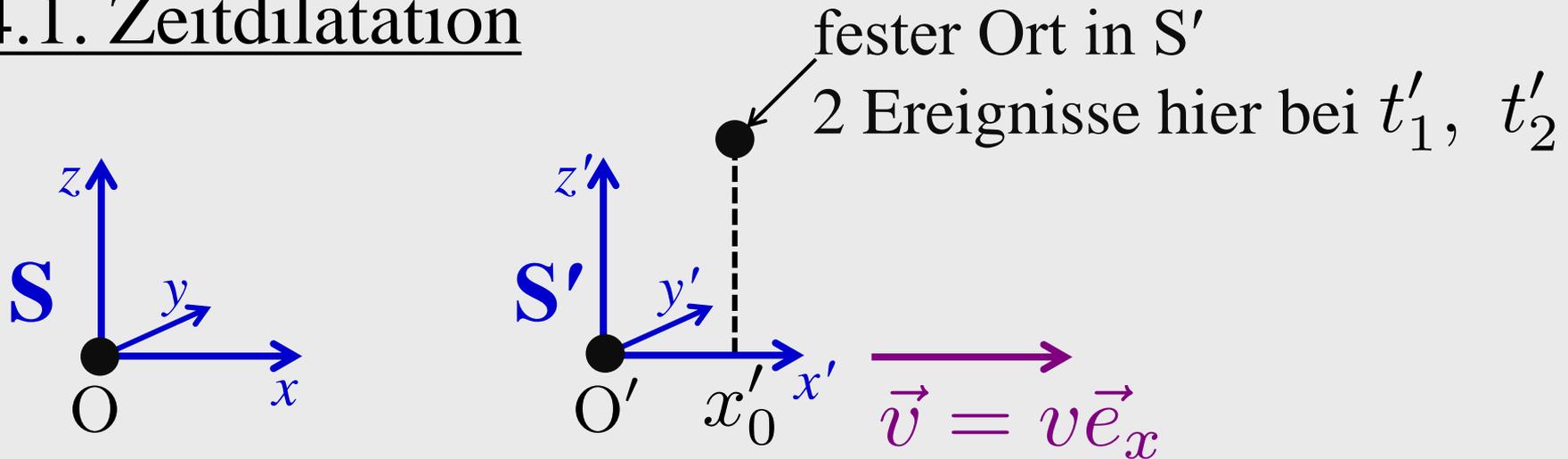
Spezialfall 2:  $u_y = u_z = 0, u_x \ll c, v \ll c$

$$u'_x \approx u_x - v, \quad u'_y = u'_z = 0$$

wie bei Galilei-Transformation

## 6.4. Einfache Konsequenzen

### 6.4.1. Zeitdilatation



S: Ereignisse an verschiedenen Orten  $x_{01}, x_{02}$

$$x_{01} = \gamma(x'_0 + vt'_1), \quad x_{02} = \gamma(x'_0 + vt'_2)$$

$$\Rightarrow x_{01} - x_{02} = \gamma v(t'_1 - t'_2) \neq 0$$

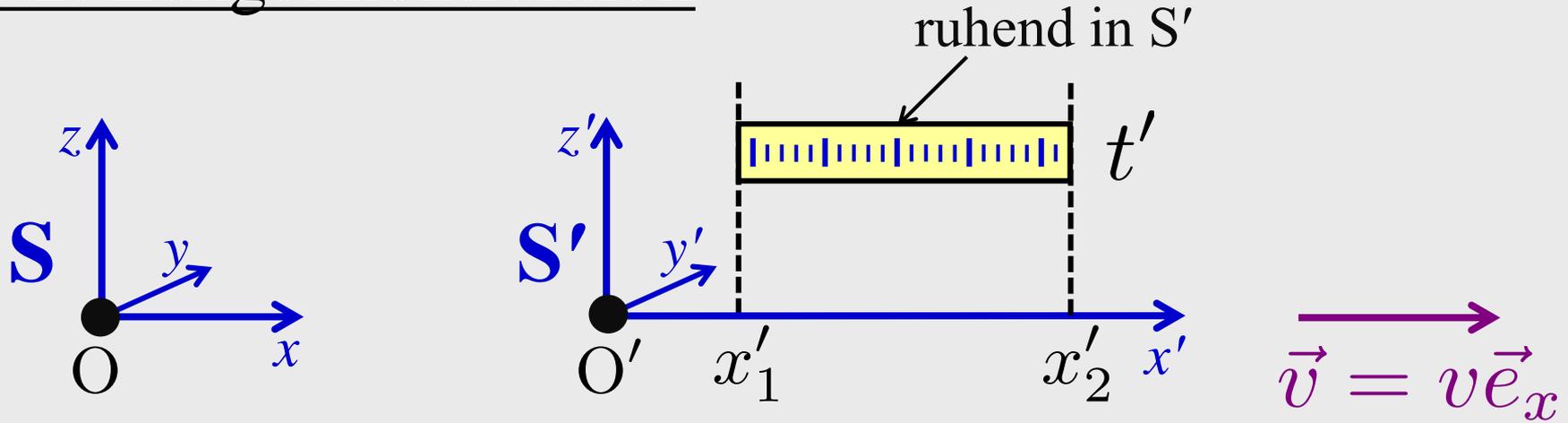
Zeitintervall in S ist **größer** als das in S':

$$t_1 = \gamma(t'_1 + vx'_0/c^2), \quad t_2 = \gamma(t'_2 + vx'_0/c^2)$$

$$\Rightarrow t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1) \equiv \gamma \Delta t_E \leftarrow \text{Eigenzeit (Zeit im eigenen Ruhesystem)}$$

Zeitdilatation

## 6.4.2. Längenkontraktion



Länge des Stabes in  $S'$  (**Ruhelänge**):  $x'_2 - x'_1$

Messe Endpunktkoordinaten in  $S$  zur Zeit  $t$ :

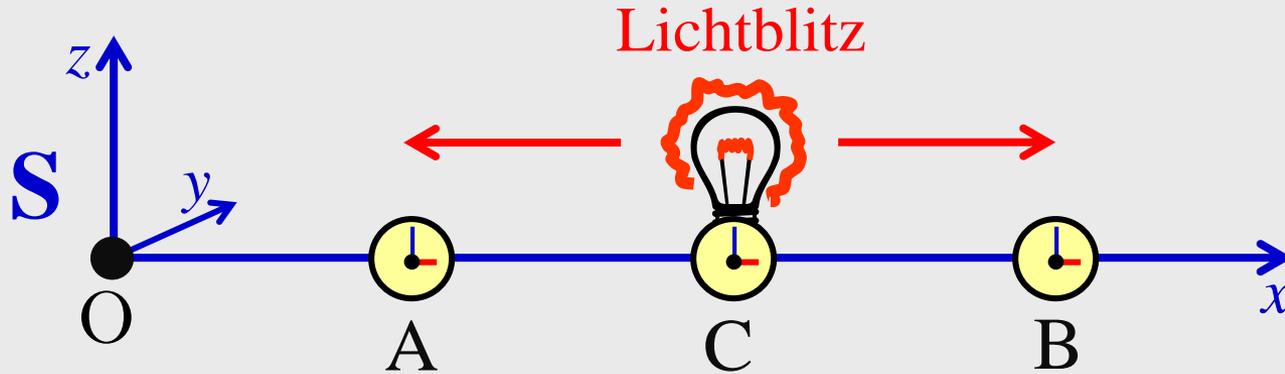
$$x'_{1,2} = \gamma(x_{1,2} - vt) \Rightarrow x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma} (x'_2 - x'_1)$$

← **Ruhelänge (Länge des Maßstabs im eigenen Ruhesystem)**

← **Längenkontraktion**

## 6.4.3. Gleichzeitigkeit



- A, B feste Uhren in S; C mittig zwischen A, B
- Synchronisierung durch Lichtblitz von C
- Ereignisse in A und B **gleichzeitig**, falls  $t_A = t_B$

System  $S'$ :  $C = C'$  bei  $t = t' = 0$

$$t_A = t_B \Rightarrow$$

$$t'_B - t'_A = \gamma \left( (t_B - t_A) - \frac{\beta}{c} (x_B - x_A) \right) = \beta\gamma \frac{x_A - x_B}{c} \neq 0$$

Gleichzeitigkeit ist systemabhängig!

## 6.4.4. Dopplereffekt

a) Schallwellen:

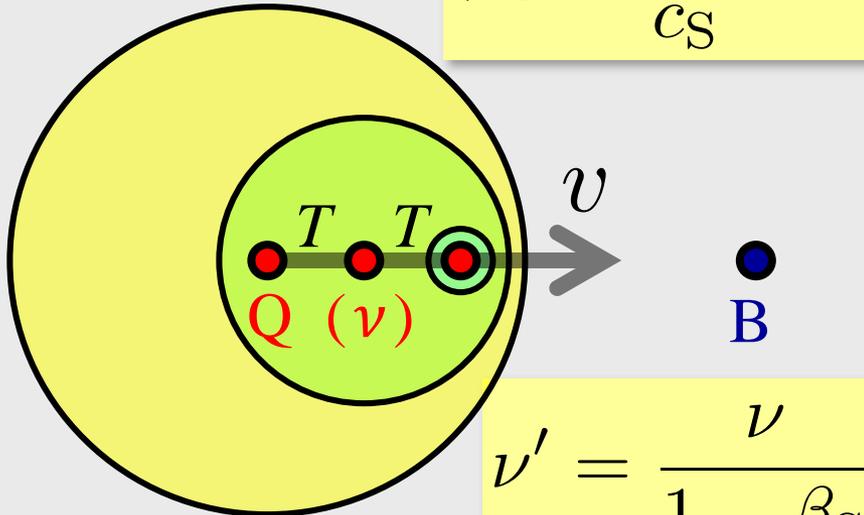
„Schalläther“

Schallgeschw. im **Medium** (Luft, Festkörper,...) =  $c_S$

Physik 1  $\Rightarrow$

Quelle bewegt

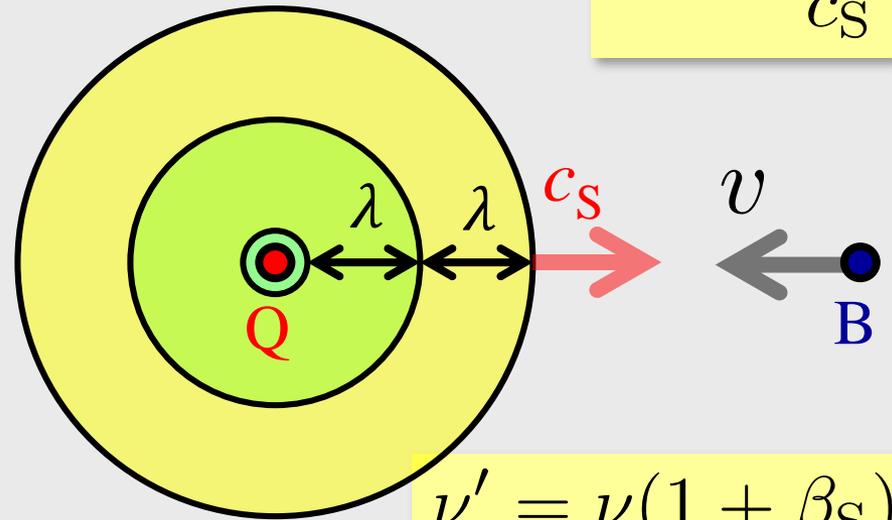
$$\beta_S = \frac{v}{c_S} < 1$$



$$\nu' = \frac{\nu}{1 - \beta_S}$$

Beobachter bewegt

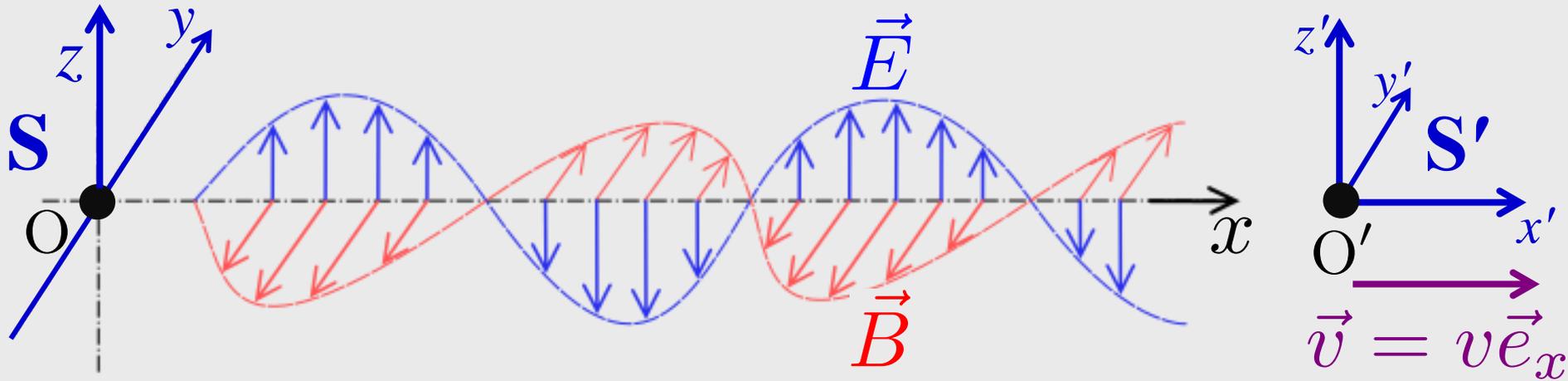
$$\beta_S = \frac{v}{c_S}$$



$$\nu' = \nu(1 + \beta_S)$$

Dopplereffekt hängt von **Absolut**bewegung der Quelle ab!

b) Licht: Nur **Relativ**geschwindigkeit zählt (ex. kein Äther)



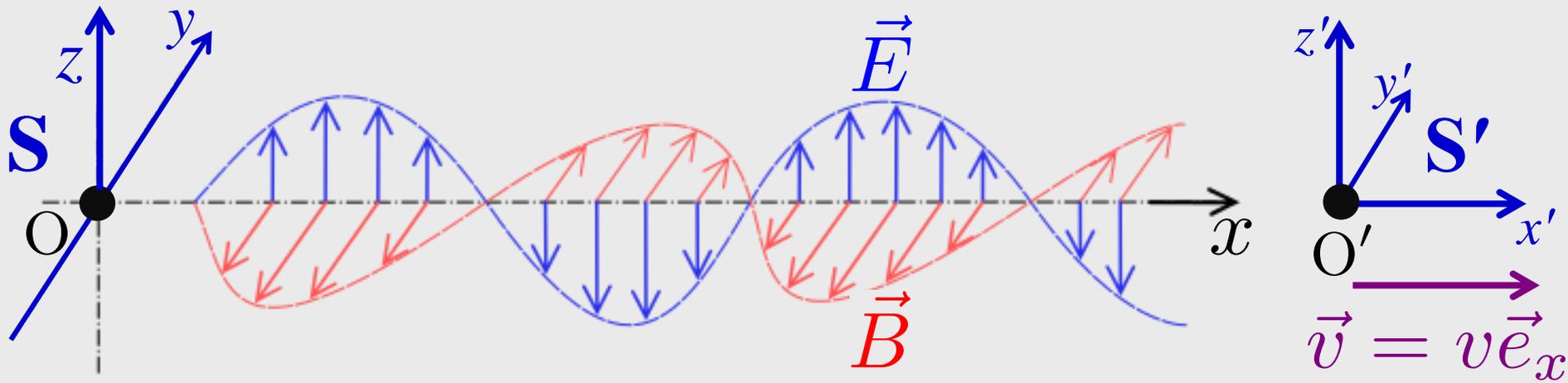
Ebene Welle im Quellsystem S in  $x$ -Richtung laufend:

$$A \sin(\omega t - kx) = A \sin(\omega(t - x/c)) , \quad \omega = ck$$

Welle im Empfängersystem S':

$$t - \frac{x}{c} = \gamma \left( t' + \beta \frac{x'}{c} \right) - \gamma \left( \frac{x'}{c} + \beta t' \right) = \gamma(1 - \beta) \left( t' - \frac{x'}{c} \right)$$

$$\Rightarrow A \sin(\omega(t - x/c)) = A \sin(\gamma(1 - \beta)\omega(t' - x'/c))$$



$$\begin{aligned}
 A \sin(\omega(t - x/c)) &= A \sin(\gamma(1 - \beta)\omega(t' - x'/c)) \\
 &= A \sin(\omega'(t' - x'/c))
 \end{aligned}$$

$$\omega' = \gamma(1 - \beta)\omega = \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \omega = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \omega$$

$$\nu' = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \nu$$

$$\lambda' = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \lambda$$

## 6.4.5. Experimenteller Test: Myon-Zerfall

Im stochastischen Mittel gilt:

$$\#(\text{Zerfälle während } \Delta t) \propto N(t) \cdot \Delta t$$

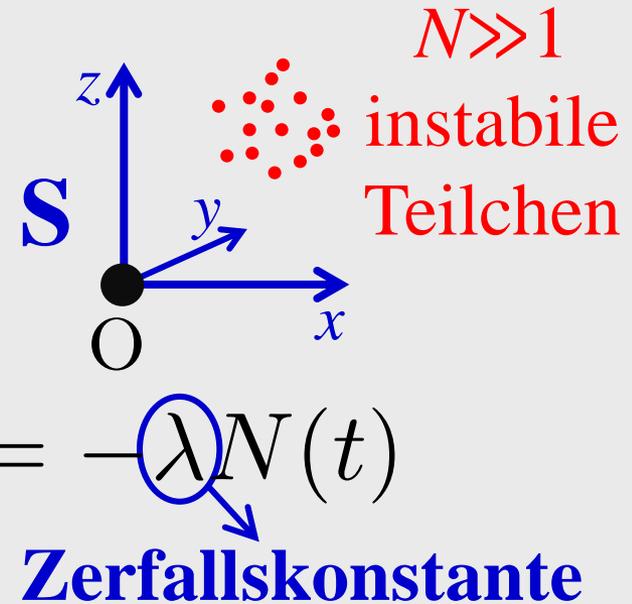
$$\Rightarrow dN = -\lambda N dt \Rightarrow \dot{N}(t) = -\lambda N(t)$$

Folgerung:

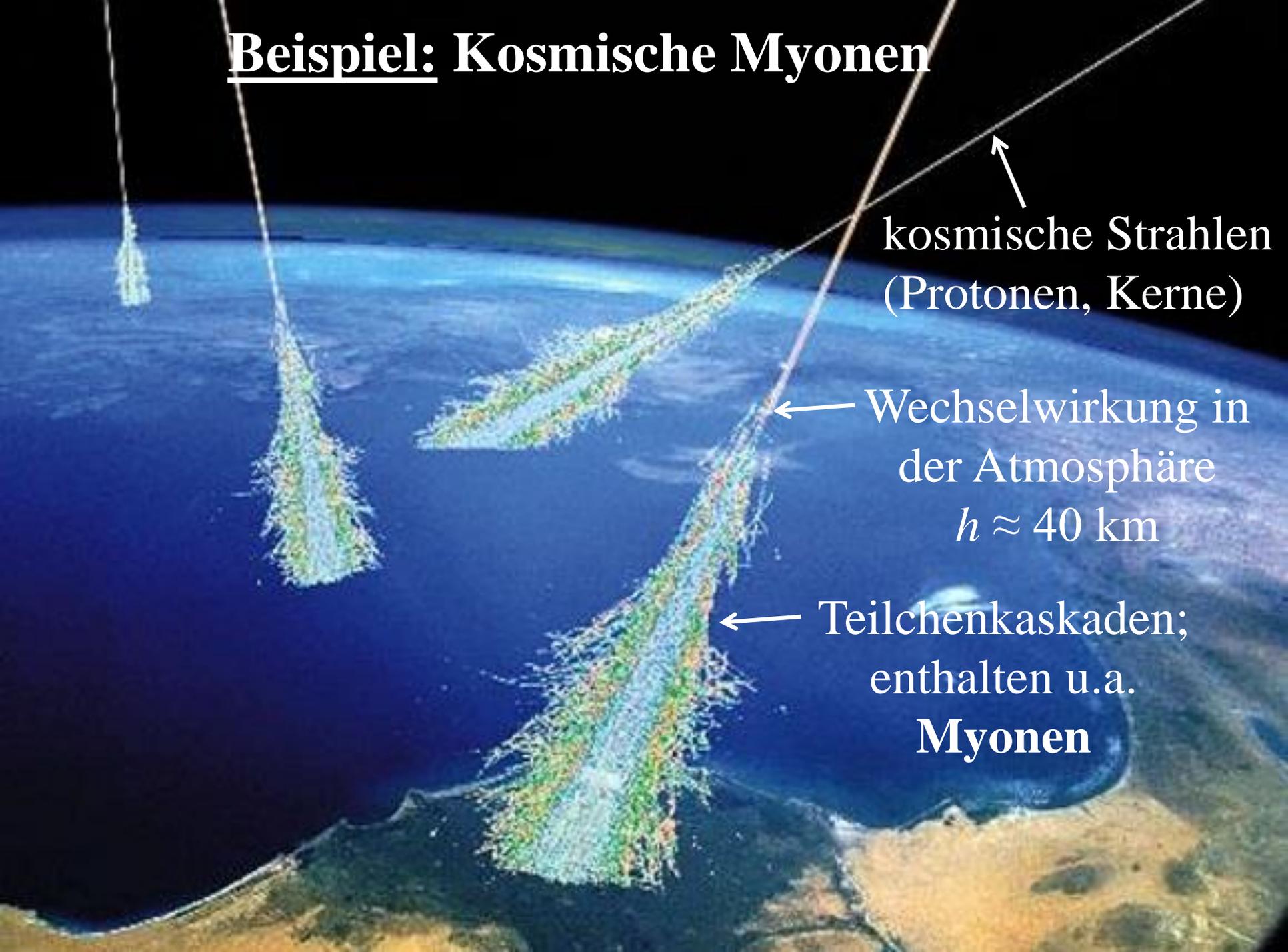
$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-t/\tau} \text{ mit } N_0 = N(t=0)$$

$\tau = 1/\lambda$  heißt **Lebensdauer** der Teilchen

$\tau$  ist die **mittlere** Zeit bis zum Zerfall eines Teilchens, gemessen ab irgendeinem Zeitpunkt – ganz egal, wie lange das Teilchen bis dahin schon überstanden hat.



# Beispiel: Kosmische Myonen

A diagram illustrating cosmic ray showers. It shows a view from space looking down at the Earth's surface. Several thin, dark lines representing primary cosmic rays (protons and nuclei) descend from the top. At a certain altitude, these rays interact with the atmosphere, creating a cascade of secondary particles. These cascades are shown as branching, multi-colored structures (green, blue, red) that spread out as they descend. The Earth's surface is visible at the bottom, showing land and water. Labels with arrows point to the primary rays, the interaction point, and the secondary particle cascades.

kosmische Strahlen  
(Protonen, Kerne)

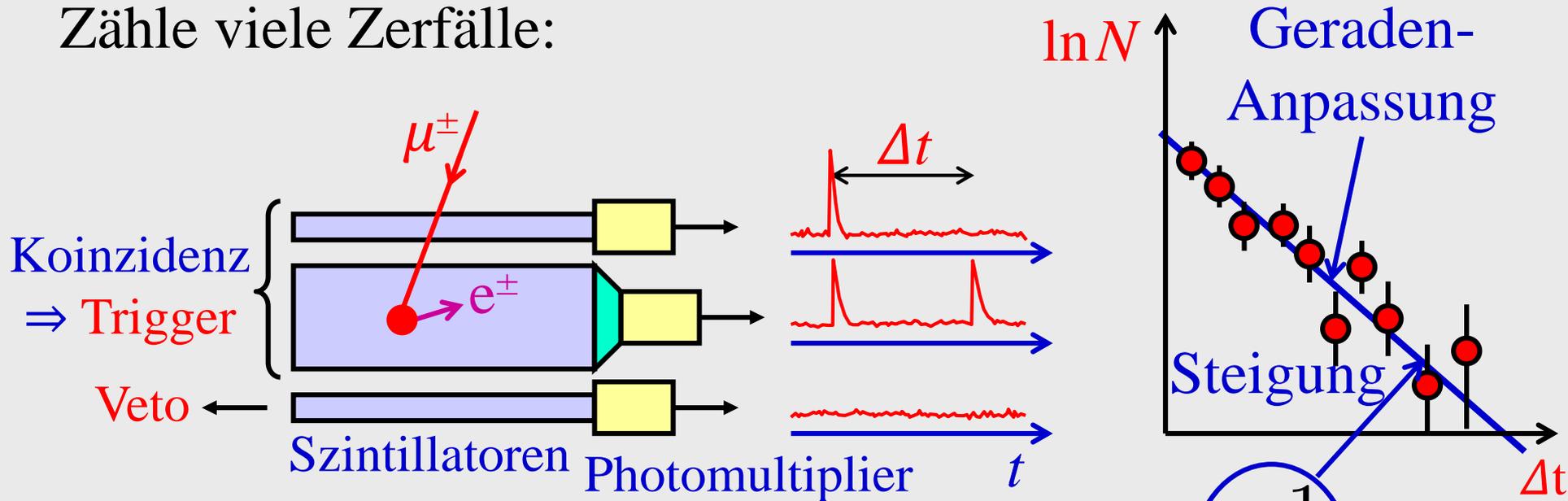
Wechselwirkung in  
der Atmosphäre  
 $h \approx 40$  km

Teilchenkaskaden;  
enthalten u.a.  
**Myonen**

# Messung der Lebensdauer des Myons (F-Praktikum)

Myon-Zerfall:  $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ ,  $\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu$   
Neutrinos (hier nicht nachweisbar)

Zähle viele Zerfälle:



$$N = N_0 e^{-\Delta t/\tau} \Rightarrow \ln N = \ln N_0 - \frac{1}{\tau} \cdot \Delta t$$

Resultat:  $\tau = 2,2 \mu\text{s}$  → mittlere Zerfallsdauer des Myons in seinem Ruhesystem

# Beobachtungen für kosmische Myonen:

$$\langle v_\mu \rangle = 0,9998c, \quad \langle \gamma \rangle = 50$$

**Problem:**  $\langle v_\mu \rangle \tau = 660 \text{ m} \ll 40 \text{ km}$

## Lösung aus Sicht des Myons:

Die Flugstrecke (Maßstab) ist längenkontrahiert  $\Rightarrow$

$$\ell_\mu = \frac{1}{\gamma} \cdot 40 \text{ km} = 800 \text{ m} \approx \langle v_\mu \rangle \tau$$

## Lösung aus Sicht Experimentators:

Die Zerfallszeit des Myons ist zeitdilatiert  $\Rightarrow$

$$\langle \Delta t_{\text{Erde}} \rangle = \langle \gamma \rangle \tau = 110 \mu\text{s}$$

$$\langle \Delta t_{\text{Erde}} \rangle \cdot \langle v_\mu \rangle = 33 \text{ km}$$

## 6.5. Relativistische Dynamik

**Bisher:** Lorentz-kovariante Formulierung der **Kinematik**

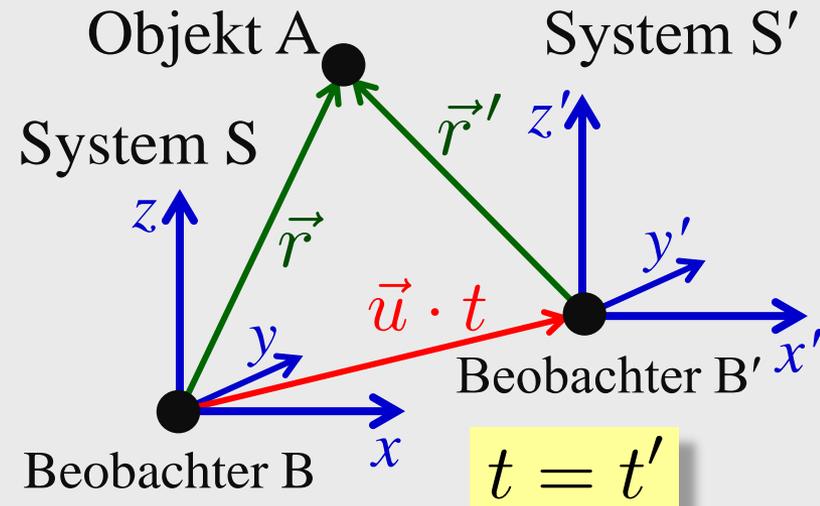
**Nun:** Lorentz-kovariante Formulierung der **Dynamik**

### 6.5.1. Relativistischer Impuls

**Newtonscher Impuls:**  $\vec{p} = m\vec{v} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$

**Galilei-Transformation:**

$$\begin{aligned}\vec{p}' &= m(\vec{v} - \vec{u}) \\ &= \vec{p} + \text{const.}\end{aligned}$$



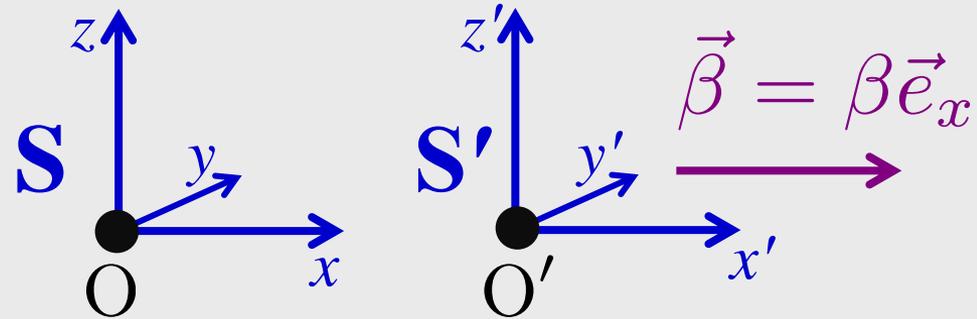
Ist der Gesamtimpuls eines Systems von Massenpunkten in einem Inertialsystem erhalten, so auch in jedem anderen!

Lorentz-Transformation:

$$m \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow m \frac{d\vec{r}'}{dt'}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{dy'}{dt'} &= \frac{dy}{\gamma(dt - \beta dx/c)} \\ &= \frac{1}{\gamma(1 - \beta v_x/c)} \frac{dy}{dt} \end{aligned}$$



$v_x$ -abhängige Streckung von  $v_y$

Die relativistische Zeittransformation zerstört die Systemunabhängigkeit der Erhaltung des Impulses der Newtonschen Mechanik!

Lösung: Messe für jede Masse  $m$  die Zeit im eigenen Ruhesystem  $\rightarrow$  **Eigenzeit  $\tau$**

Definition: Relativistischer Impuls

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{d\tau} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma m \frac{d\vec{r}}{dt} = \gamma m \vec{v}$$

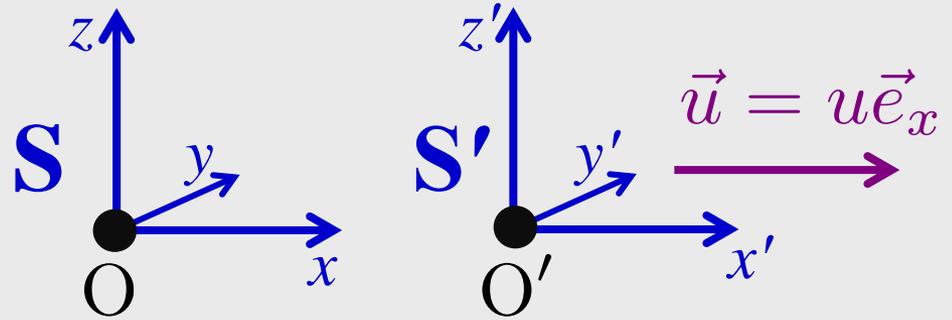
Zeitdilatation  $\gamma \equiv \gamma(v) = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

Probe:  $v \ll c \Rightarrow \gamma \approx 1 \Rightarrow \vec{p} \approx m \frac{d\vec{r}}{dt}$

Relativistischer Impuls geht bei kleinen Geschwindigkeiten in den Newtonschen Impuls über!

## Probe: Lorentz-Transformation

$$\begin{aligned} p'_y &= m \frac{dy'}{d\tau} \\ &= m \frac{dy}{d\tau} = p_y \end{aligned}$$



Impulserhaltung senkrecht zur Transformationsrichtung bleibt bestehen.

$$\begin{aligned} p'_x &= m \frac{dx'}{d\tau} = m \frac{\gamma(u)(dx - \beta(u)cdt)}{d\tau} = \gamma(u) \left( p_x - \beta(u)mc \frac{dt}{d\tau} \right) \\ &= \gamma(u) (p_x - \beta(u)\gamma(v)mc) \equiv \gamma(u) (p_x - \beta(u)E/c) \end{aligned}$$

Lorentz-Transformationsformel mit  $x \rightarrow p_x$ ,  $ct \rightarrow E/c$

und

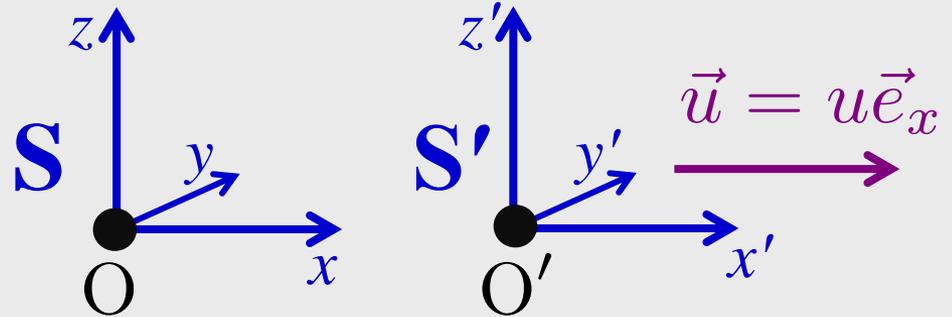
$$E = \gamma mc^2$$

$$\gamma \equiv \gamma(v)$$

Betrachte Massen  $m_i$  in abgeschlossenem System.

Impulserhaltung in  $S \Rightarrow$

$$\sum_i p_{xi} = \text{const.}$$



In  $S'$ :

$$\sum_i p'_{xi} = \sum_i \gamma(u) (p_{xi} - \beta(u) E_i / c)$$

$$= \gamma(u) \left( \sum_i p_{xi} \right) - \beta(u) \gamma(u) / c \left( \sum_i E_i \right)$$

$\text{const.}$ 
 $\text{const.}?$

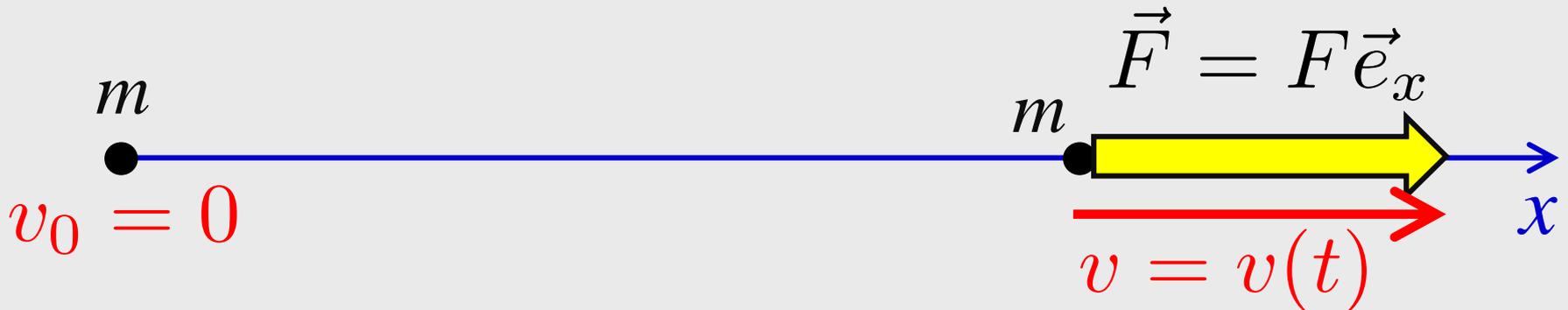
Die Impulserhaltung in  $S'$  folgt nur, falls es eine zweite Erhaltungsgröße gibt:  $\sum_i E_i$  ... Ist  $E_i$  die Energie von  $m_i$ ?

## 6.5.2. Relativistische Energie

Relativistische Bewegungsgleichung:

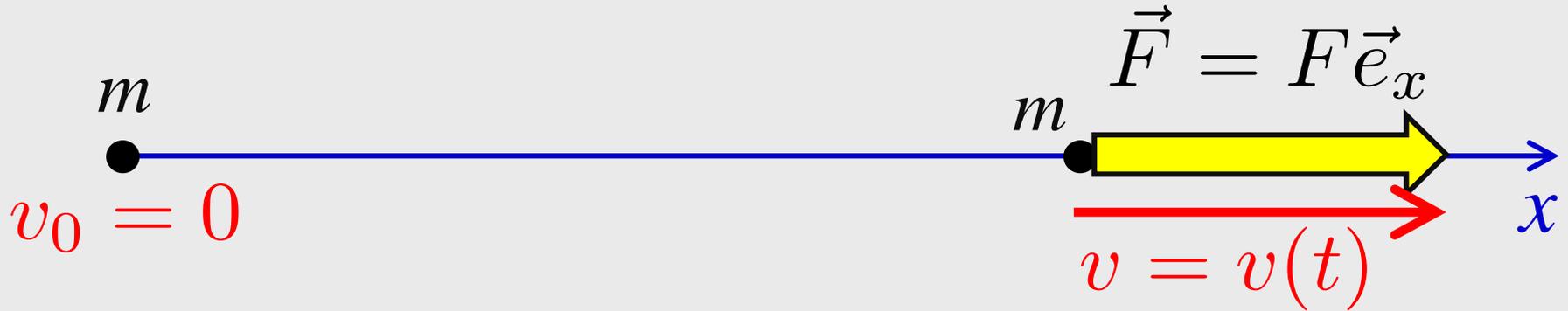
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{mit} \quad \vec{p} = \gamma m \frac{d\vec{r}}{dt} = \gamma(v) m \vec{v}$$

Betrachte Beschleunigung durch Kraft in  $x$ -Richtung:



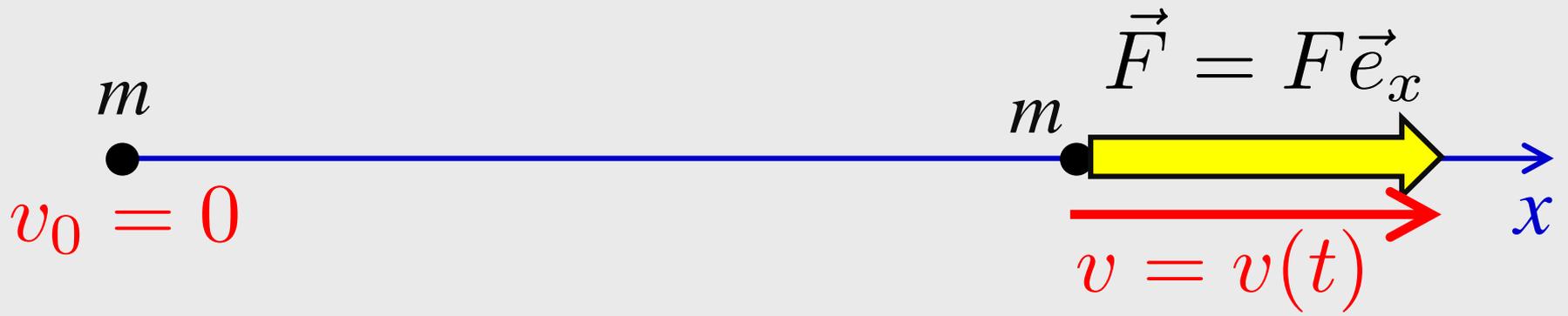
$F$  verrichtet Arbeit  $W$ , die in kinetische Energie  $E_{\text{kin}}$  des Massenpunktes übergeht.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{mit} \quad \vec{p} = \gamma m \frac{d\vec{r}}{dt} = \gamma(v) m \vec{v}$$



$$\begin{aligned} dW &= F dx = F \frac{dx}{dt} dt = F v dt = m \frac{d(\gamma v)}{dt} v dt \\ &= m \left( \frac{d(\gamma v^2)}{dt} - \gamma v \frac{dv}{dt} \right) dt = m \left( \frac{d(\gamma v^2)}{dv} - \gamma v \right) dv \end{aligned}$$

$$\gamma v = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -c^2 \frac{d}{dv} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -c^2 \frac{d}{dv} \frac{1}{\gamma}$$



$$\begin{aligned}
 dW &= m \left( \frac{d(\gamma v^2)}{dv} + c^2 \frac{d}{dv} \frac{1}{\gamma} \right) dv = m \frac{d}{dv} \left( \gamma v^2 + \frac{c^2}{\gamma} \right) dv \\
 &= m \frac{d}{dv} \left[ \gamma c^2 \left( \frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right) \right] dv = \frac{d(\gamma m c^2)}{dv} dv
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{\text{kin}} &= W = \int_0^v \frac{d(\gamma(\tilde{v}) m c^2)}{d\tilde{v}} d\tilde{v} = \gamma(\tilde{v}) m c^2 \Big|_0^v \\
 &= \gamma(v) m c^2 - m c^2 \equiv E - E_0
 \end{aligned}$$

Relativistische Energie:  $E = \gamma mc^2$

Ruheenergie von  $m$ :  $E_0 = mc^2$

Kinetische Energie:  $E_{\text{kin}} = E - E_0 = (\gamma - 1)mc^2$

**Folgerung:** In abgeschlossenem System (keine äußeren Kräfte) ist die relativistische Energie erhalten. Die kinetische Energie ist erhalten, wenn die Massen im System sich nicht ändern!

**Newtonscher Grenzfall:**  $v \ll c$

$$E_{\text{kin}} = (\gamma - 1)mc^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) mc^2 \approx \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) mc^2$$

$$= \frac{1}{2}mv^2$$

Newtonsche Physik wird reproduziert

# Die Energie-Impuls-Verknüpfung (1):

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} = \gamma \vec{\beta} m c = m \frac{d\vec{r}}{d\tau}$$

$$E/c = \gamma m c = m c \frac{dt}{d\tau} = m \frac{d(ct)}{d\tau}$$

$\Rightarrow (E/c, \vec{p}) = mc(\gamma, \gamma \vec{\beta})$  transformieren wie  $(ct, \vec{r})$

$$ct' = \gamma_u(ct - \beta_u x)$$

$$x' = \gamma_u(x - \beta_u ct)$$

$$y' = y, \quad z' = z$$

$$E'/c = \gamma_u(E/c - \beta_u p_x)$$

$$p'_x = \gamma_u(p_x - \beta_u E/c)$$

$$p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z$$

$\beta_u, \gamma_u$  gehören zur Relativgeschwindigkeit  $u$  der Systeme  
 $\beta, \gamma$  gehören zur Geschwindigkeit  $v$  des Teilchens

- Energie/Impulserhaltung ist wirklich systemunabhängig
- Solche 4-komponentigen Objekte heißen **Vierervektoren**

Die Energie-Impuls-Verknüpfung (2):

$$\Rightarrow (E/c)^2 - \vec{p}^2 = \gamma^2(1 - \beta^2)m^2c^2 = m^2c^2$$

ist lorentzinvariant (unabhängig vom Inertialsystem)!

Bemerkung: Seien  $p \equiv (p_0, \vec{p})$ ,  $q \equiv (q_0, \vec{q})$  Vierervektoren.

Dann ist Produkt  $p q \equiv p_0 q_0 - \vec{p} \vec{q}$  lorentzinvariant.

$$\Rightarrow \frac{\vec{p}}{E} = \frac{\vec{\beta}}{c}$$

$$\Rightarrow \text{Photonen: } E = \hbar\omega$$

Strahlungsdruck

$$\vec{p} = \frac{\vec{\beta}}{c} E = \frac{\hbar\omega}{c} \vec{e}_\beta = \hbar \vec{k}$$



Beweis der Lorentzinvarianz von  $pq$  (für Ungläubige):

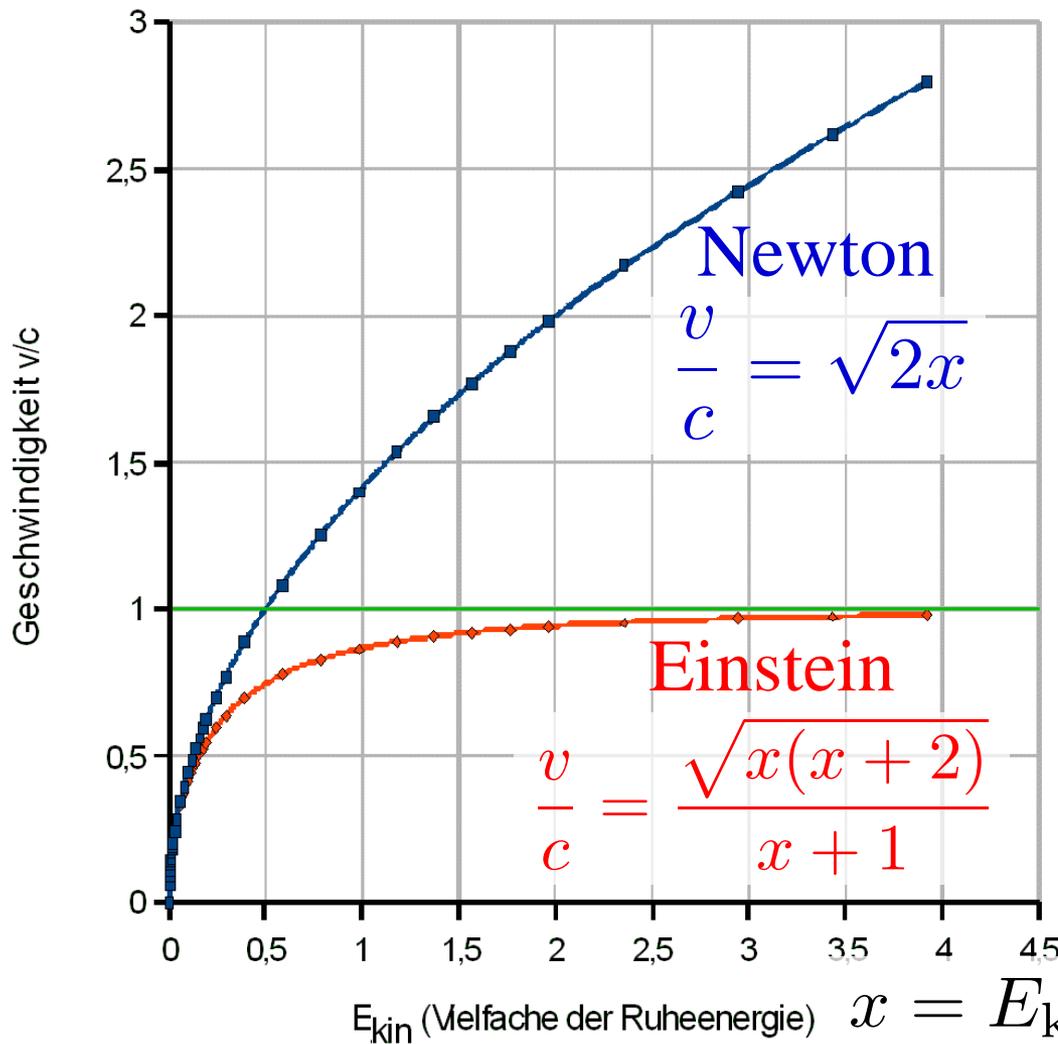
$$p'_0 = \gamma_u (p_0 - \beta_u p_x) \quad q'_0 = \gamma_u (q_0 - \beta_u q_x)$$

$$p'_x = \gamma_u (p_x - \beta_u p_0) \quad q'_x = \gamma_u (q_x - \beta_u q_0)$$

$$p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z \quad q'_y = q_y, \quad q'_z = q_z$$

$$\begin{aligned} p'_0 q'_0 - \vec{p}' \cdot \vec{q}' &= \gamma_u^2 (p_0 q_0 - \beta_u p_0 q_x - \beta_u p_x q_0 + \beta_u^2 p_x q_x) \\ &\quad - \gamma_u^2 (p_x q_x - \beta_u p_x q_0 - \beta_u p_0 q_x + \beta_u^2 p_0 q_0) \\ &\quad - p_y q_y - p_z q_z \\ &= \gamma_u^2 (p_0 q_0 (1 - \beta_u^2) - p_x q_x (1 - \beta_u^2)) - p_y q_y - p_z q_z \\ &= p_0 q_0 - p_x q_x - p_y q_y - p_z q_z = p_0 q_0 - \vec{p} \cdot \vec{q} \end{aligned}$$

Konsequenz 1: Massen  $m$  gewinnen bei  $v \rightarrow c$  Energie nur noch durch Vergrößerung der relativistischen Masse  $\gamma m$ , nicht durch Vergrößerung der Geschwindigkeit.



$$E = \gamma m c^2$$

$$E = \gamma mc^2$$

Konsequenz 2: Umwandlung von Masse in Energie.

$\alpha$ -Zerfall eines ruhenden Atomkerns  $K_A$ :



Impulserhaltung:  $\vec{p}_A = \vec{0} = \vec{p}_B + \vec{p}_\alpha$

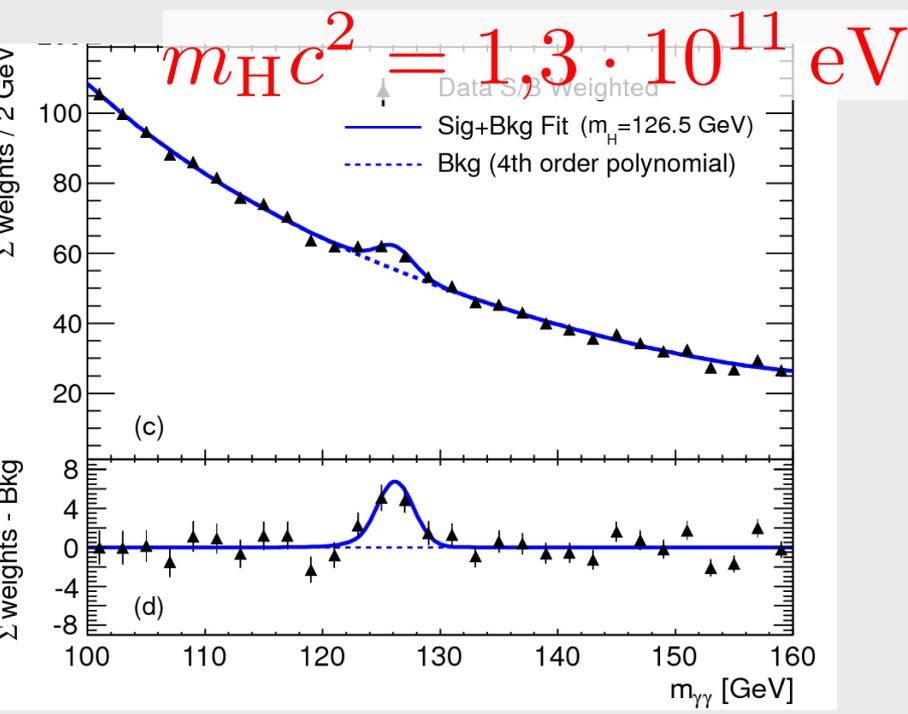
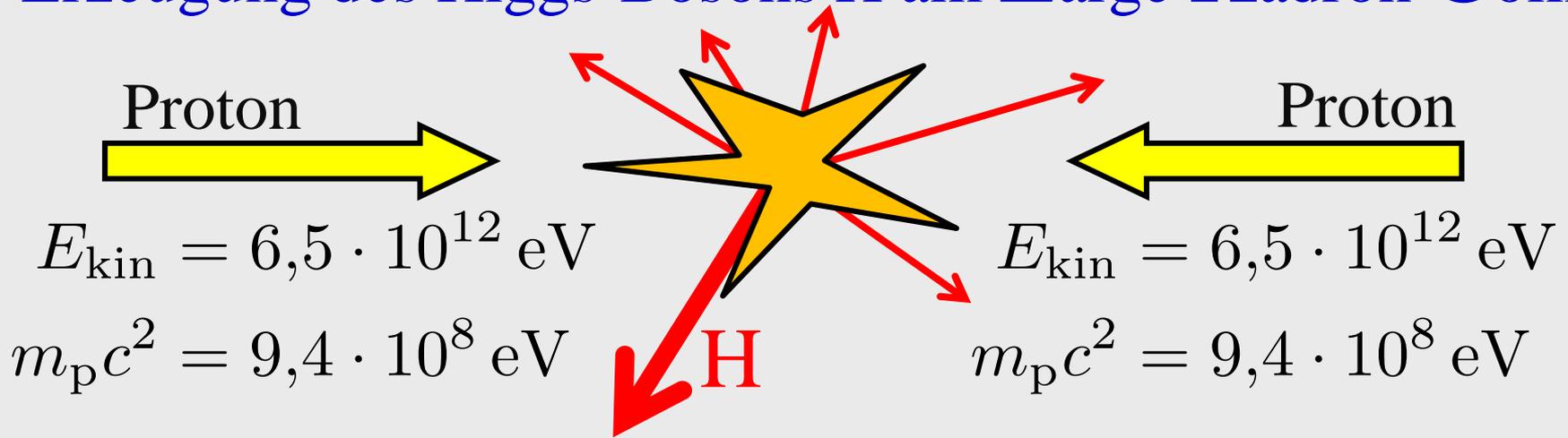
Energieerhaltung:  $m_A c^2 = m_B c^2 + E_{\text{kin}B} + m_\alpha c^2 + E_{\text{kin}\alpha}$

$$\Rightarrow (m_A - m_B - m_\alpha) c^2 = E_{\text{kin}B} + E_{\text{kin}\alpha}$$

Anwendungen: Energiegewinnung durch Kernspaltung (Kernkraftwerk) und Kernfusion (Sonne); Kernwaffen

# Konsequenz 3: Umwandlung von Energie in Masse.

## Erzeugung des Higgs-Bosons H am Large Hadron Collider



# LHC: Direkter Test der relativistischen Massenzunahme

Magnetische Ablenkkraft entlang des Rings (klassisch):

$$F = evB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow BR = \frac{mv}{e}$$

Ring ist kein Kreis:

$$\langle BR \rangle \approx 22,7 \text{ T km} \Rightarrow v = \frac{e}{m} \langle BR \rangle \approx 6930 c$$

Messung:  $v \approx c$

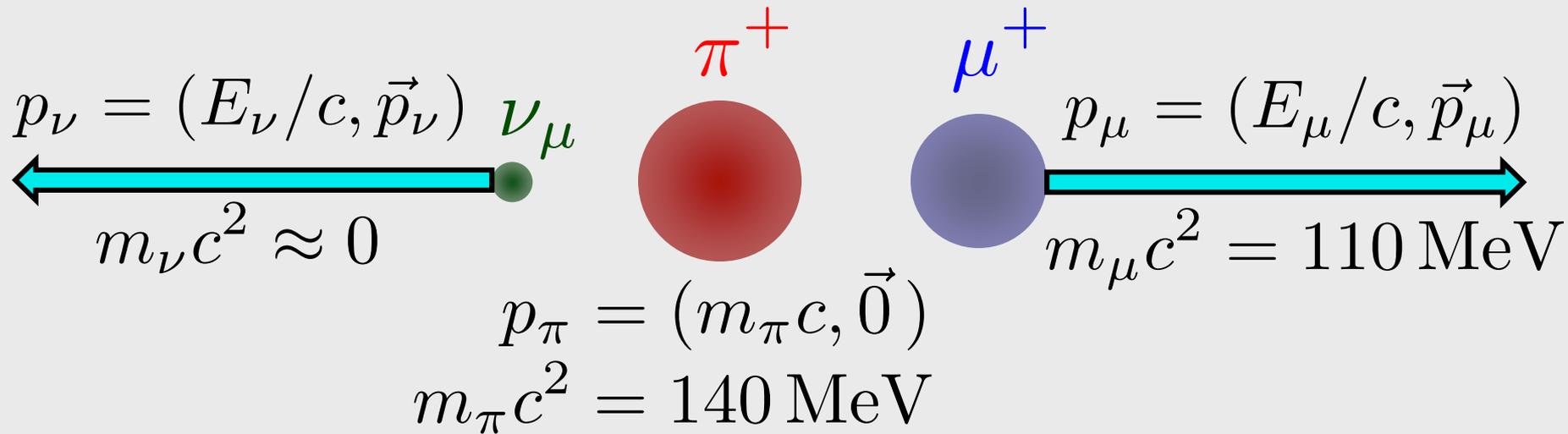
Erklärung:

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} = \frac{6,5 \text{ TeV}}{938 \text{ MeV}} \approx 6930$$

$$v = \frac{e}{\gamma m} \langle BR \rangle \approx c$$



Beispiel: Zerfall eines ruhenden Pions  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$



Energie-Impuls-Erhaltung:  $p_\pi = p_\mu + p_\nu$

$$\begin{aligned}
 m_\nu^2 c^2 &= p_\nu^2 = (p_\pi - p_\mu)^2 = p_\pi^2 + p_\mu^2 - 2p_\pi p_\mu \\
 &= m_\pi^2 c^2 + m_\mu^2 c^2 - 2m_\pi c E_\mu / c + 2 \cdot \vec{0} \cdot \vec{p}_\mu
 \end{aligned}$$

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2 - m_\nu^2}{2m_\pi} \cdot c^2 = 110 \text{ MeV} \Rightarrow E_\nu = 30 \text{ MeV}$$

$$|\vec{p}_\mu| = |\vec{p}_\nu| \stackrel{m_\nu \approx 0}{=} E_\nu / c = 30 \text{ MeV} / c$$

## 6.5.3. Relativistische Kraft

Betrachte Masse mit Geschwindigkeit  $\vec{v}$ ,  $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$ ,  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) = m \left( \frac{d\gamma}{dt} \vec{v} + \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} \right)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{dv} \frac{dv}{dt} = \frac{d\gamma}{dv} a$$

$$\frac{d\gamma}{dv} = \frac{d}{dv} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \gamma^3 \frac{(-2v)}{c^2} = \gamma^3 \beta^2 \frac{1}{v}$$

$$\vec{F} = m \left( \gamma^3 \beta^2 a \vec{e}_v + \gamma \vec{a} \right) = m \gamma^3 a \left( \beta^2 \vec{e}_v + \gamma^{-2} \vec{e}_a \right) \xrightarrow{v \ll c} m \vec{a}$$

**Kraft nicht mehr parallel zur Beschleunigung!**

## Lorentz-Transformation der Kraft:

Betrachte Masse mit Geschwindigkeit  $\vec{v}$ ,  $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$ ,  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{E}{c} = \frac{1}{c} \frac{dt}{d\tau} \frac{dE}{dt} = \frac{\gamma}{c} \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \gamma \frac{\vec{v}}{c} \vec{F} = \gamma \vec{\beta} \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma \vec{F}$$

Folgerung:  $(\gamma \vec{\beta} \vec{F}, \gamma \vec{F})$  transformiert wie  $(E/c, \vec{p}) = mc(\gamma, \gamma \vec{\beta})$

Folgerung:  $f \equiv (\gamma \vec{\beta} \vec{F}, \gamma \vec{F})$  ist ein Vierervektor

Viererkraft

Beachte (s.o):  $U \equiv c(\gamma, \gamma \vec{\beta})$  ist ein Vierervektor

Vierergeschwindigkeit

# Relativistische Bewegungsgleichung:

$$f \equiv (\gamma \vec{\beta} \vec{F}, \gamma \vec{F})$$

Viererkraft

$$U \equiv c(\gamma, \gamma \vec{\beta})$$

Vierergeschwindigkeit

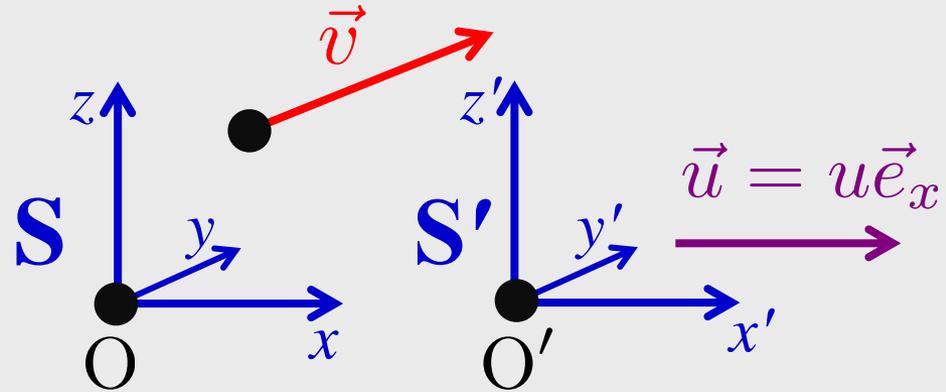
$$f = \frac{d}{d\tau} (E/c, \vec{p}) = mc \frac{d}{d\tau} (\gamma, \gamma \vec{\beta}) = m \frac{dU}{d\tau}$$

Viererkraft = Ruhemasse  $\times$  Viererbeschleunigung

# Übung 1: Lorentz-Transformation von $U/c = (\gamma, \gamma\vec{\beta})$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\beta_u = \frac{u}{c}, \quad \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_u^2}}$$



$$\gamma' = \gamma_u(\gamma - \beta_u\gamma\beta_x)$$

$$\beta'_x = \frac{\beta_x - \beta_u}{1 - \beta_u\beta_x}$$

$$\gamma'\beta'_x = \gamma_u(\gamma\beta_x - \beta_u\gamma) \Rightarrow$$

$$\gamma'\beta'_y = \gamma\beta_y \quad \gamma'\beta'_z = \gamma\beta_z \quad \beta'_{y,z} = \frac{\beta_{y,z}}{\gamma_u(1 - \beta_u\beta_x)}$$

$\Rightarrow$  Geschwindigkeitsaddition (wie oben zu Fuß)

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}, \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma_u \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)}, \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma_u \left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)}$$

## Übung 2: Lorentz-Transformation von $f$ und $\vec{F}$

$$f \equiv (\gamma \vec{\beta} \vec{F}, \gamma \vec{F})$$

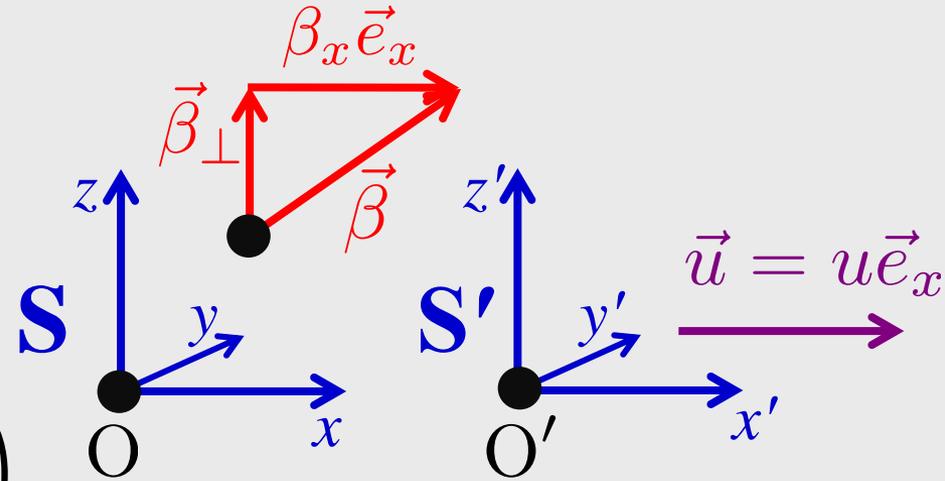
$$\gamma' = \gamma_u \gamma (1 - \beta_u \beta_x)$$

$$\gamma' F'_x = \gamma_u \left( \gamma F_x - \beta_u \gamma \vec{\beta} \vec{F} \right)$$

$$\gamma' \vec{F}'_{\perp} = \gamma \vec{F}_{\perp}$$

$$F'_x = \frac{F_x - \beta_u \vec{\beta} \vec{F}}{1 - \beta_u \beta_x}$$

$$\vec{F}'_{\perp} = \frac{\vec{F}_{\perp}}{\gamma_u (1 - \beta_u \beta_x)}$$



$\vec{v}_{\perp}$ ,  $\vec{F}_{\perp}$  sind nicht lorentzinvariant

## 6.6. Elektromagnetisches Feld und Relativitätsprinzip

Lorentzkraft auf bewegte Ladung  $q$ :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Viererkraft:  $\gamma\vec{\beta}\vec{F} = q\gamma\vec{\beta}\vec{E}$  da  $\vec{\beta} \parallel \vec{v} \perp (\vec{v} \times \vec{B})$

$$\gamma\vec{F} = q\gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\Rightarrow f_L = q(\gamma\vec{\beta}\vec{E}, \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}))$$

**Folgerung:**  $E$ - und  $B$ -Felder wandeln sich unter Lorentz-Transformationen ineinander um.

**Bemerkung (ohne Beweis):** Die Maxwell-Gleichungen sind unter diesen Lorentz-Transformationen invariant.

# Lorentz-Transformation elektromagnetischer Felder

$$E'_x = E_x$$

$$E'_y = \gamma_u (E_y - c\beta_u B_z)$$

$$E'_z = \gamma_u (E_z + c\beta_u B_y)$$

$$B'_x = B_x$$

$$B'_y = \gamma_u (B_y + \frac{\beta_u}{c} E_z)$$

$$B'_z = \gamma_u (B_z - \frac{\beta_u}{c} E_y)$$

Herleitung für Interessierte:

$$\vec{F}/q = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{E} + c\vec{\beta} \times \vec{B}$$

Kraft-Transformation von oben mit  $\delta \equiv 1 - \beta_u \beta_x$

$$F'_x = \frac{F_x - \beta_u \vec{\beta} \vec{F}}{\delta}, \quad F'_y = \frac{F_y}{\gamma_u \delta}, \quad F'_z = \frac{F_z}{\gamma_u \delta}$$

$$F'_x/q = E_x - \frac{\beta_u}{\delta} (\beta_y E_y + \beta_z E_z) + \frac{c}{\delta} (\beta_y B_z - \beta_z B_y)$$

$$F'_y/q = \frac{1}{\gamma_u \delta} E_y + \frac{c}{\gamma_u \delta} (\beta_z B_x - \beta_x B_z)$$

$$F'_z/q = \frac{1}{\gamma_u \delta} E_z + \frac{c}{\gamma_u \delta} (\beta_x B_y - \beta_y B_x)$$

$$\vec{F}/q = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{E} + c\vec{\beta} \times \vec{B}$$

$$\vec{F}'/q = \vec{E}' + c\vec{\beta}' \times \vec{B}'$$

Geschwindigkeits-Transformation von oben:

$$\beta'_x = \frac{\beta_x - \beta_u}{\delta}, \quad \beta'_y = \frac{\beta_y}{\gamma_u \delta}, \quad \beta'_z = \frac{\beta_z}{\gamma_u \delta}$$

$$F'_x/q = E'_x + \frac{c}{\gamma_u \delta} (\beta_y B'_z - \beta_z B'_y)$$

$$F'_y/q = E'_y + \frac{c}{\gamma_u \delta} \beta_z B'_x - \frac{c}{\delta} (\beta_x - \beta_u) B'_z$$

$$F'_z/q = E'_z + \frac{c}{\delta} (\beta_x - \beta_u) B'_y - \frac{c}{\gamma_u \delta} \beta_y B'_x$$

**Beachte:**  $\delta = 1 - \beta_u \beta_x \Rightarrow \frac{\partial \delta}{\partial \beta_y} = \frac{\partial \delta}{\partial \beta_z} = 0$

$F'_x/q = E_x - \frac{\beta_u}{\delta}(\beta_y E_y + \beta_z E_z) + \frac{c}{\delta}(\beta_y B_z - \beta_z B_y)$	$F'_x/q = E'_x + \frac{c}{\gamma_u \delta}(\beta_y B'_z - \beta_z B'_y)$
$F'_y/q = \frac{1}{\gamma_u \delta} E_y + \frac{c}{\gamma_u \delta}(\beta_z B_x - \beta_x B_z)$	$F'_y/q = E'_y + \frac{c}{\gamma_u \delta} \beta_z B'_x - \frac{c}{\delta}(\beta_x - \beta_u) B'_z$
$F'_z/q = \frac{1}{\gamma_u \delta} E_z + \frac{c}{\gamma_u \delta}(\beta_x B_y - \beta_y B_x)$	$F'_z/q = E'_z + \frac{c}{\delta}(\beta_x - \beta_u) B'_y - \frac{c}{\gamma_u \delta} \beta_y B'_x$

$$\frac{1}{q} \frac{\partial F'_y}{\partial \beta_z} = \frac{c}{\gamma_u \delta} B_x$$

$$\frac{1}{q} \frac{\partial F'_y}{\partial \beta_z} = \frac{c}{\gamma_u \delta} B'_x$$

$$\frac{1}{q} \frac{\partial F'_x}{\partial \beta_z} = -\frac{\beta_u}{\delta} E_z - \frac{c}{\delta} B_y$$

$$\frac{1}{q} \frac{\partial F'_x}{\partial \beta_z} = -\frac{c}{\gamma_u \delta} B'_y$$

$$\frac{1}{q} \frac{\partial F'_x}{\partial \beta_y} = -\frac{\beta_u}{\delta} E_y + \frac{c}{\delta} B_z$$

$$\frac{1}{q} \frac{\partial F'_x}{\partial \beta_y} = \frac{c}{\gamma_u \delta} B'_z$$

$$\Rightarrow \boxed{B'_x = B_x} \quad \boxed{B'_y = \gamma_u \left( B_y + \frac{\beta_u}{c} E_z \right)} \quad \boxed{B'_z = \gamma_u \left( B_z - \frac{\beta_u}{c} E_y \right)}$$

$B'_x = B_x$	$B'_y = \gamma_u \left( B_y + \frac{\beta_u}{c} E_z \right)$	$B'_z = \gamma_u \left( B_z - \frac{\beta_u}{c} E_y \right)$	<b>4</b>
--------------	--	--	----------

$F'_x/q = E_x - \frac{\beta_u}{\delta} (\beta_y E_y + \beta_z E_z) + \frac{c}{\delta} (\beta_y B_z - \beta_z B_y)$	$F'_x/q = E'_x + \frac{c}{\gamma_u \delta} (\beta_y B'_z - \beta_z B'_y)$
$F'_y/q = \frac{1}{\gamma_u \delta} E_y + \frac{c}{\gamma_u \delta} (\beta_z B_x - \beta_x B_z)$	$F'_y/q = E'_y + \frac{c}{\gamma_u \delta} \beta_z B'_x - \frac{c}{\delta} (\beta_x - \beta_u) B'_z$
$F'_z/q = \frac{1}{\gamma_u \delta} E_z + \frac{c}{\gamma_u \delta} (\beta_x B_y - \beta_y B_x)$	$F'_z/q = E'_z + \frac{c}{\delta} (\beta_x - \beta_u) B'_y - \frac{c}{\gamma_u \delta} \beta_y B'_x$

**Beachte:**  $\frac{\partial \delta}{\partial \beta_x} = \frac{\partial}{\partial \beta_x} (1 - \beta_u \beta_x) = -\beta_u$

$$\frac{1}{q} \frac{\partial (F'_x \delta)}{\partial \beta_x} = -\beta_u E_x$$

$$\frac{1}{q} \frac{\partial (F'_x \delta)}{\partial \beta_x} = -\beta_u E'_x$$

$\Rightarrow$

$E'_x = E_x$
--------------

$$B'_x = B_x \quad B'_y = \gamma_u \left( B_y + \frac{\beta_u}{c} E_z \right) \quad B'_z = \gamma_u \left( B_z - \frac{\beta_u}{c} E_y \right)$$

$$\begin{aligned} F'_x/q &= E_x - \frac{\beta_u}{\delta} (\beta_y E_y + \beta_z E_z) + \frac{c}{\delta} (\beta_y B_z - \beta_z B_y) & F'_x/q &= E'_x + \frac{c}{\gamma_u \delta} (\beta_y B'_z - \beta_z B'_y) \\ F'_y/q &= \frac{1}{\gamma_u \delta} E_y + \frac{c}{\gamma_u \delta} (\beta_z B_x - \beta_x B_z) & F'_y/q &= E'_y + \frac{c}{\gamma_u \delta} \beta_z B'_x - \frac{c}{\delta} (\beta_x - \beta_u) B'_z \\ F'_z/q &= \frac{1}{\gamma_u \delta} E_z + \frac{c}{\gamma_u \delta} (\beta_x B_y - \beta_y B_x) & F'_z/q &= E'_z + \frac{c}{\delta} (\beta_x - \beta_u) B'_y - \frac{c}{\gamma_u \delta} \beta_y B'_x \end{aligned}$$

**Beachte:**  $\frac{\partial \delta}{\partial \beta_x} = \frac{\partial}{\partial \beta_x} (1 - \beta_u \beta_x) = -\beta_u$

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} \frac{\partial (F'_y \delta)}{\partial \beta_x} &= -\frac{c}{\gamma_u} B_z & \frac{1}{q} \frac{\partial (F'_y \delta)}{\partial \beta_x} &= -\beta_u E'_y - c B'_z \\ & & &= -\beta_u E'_y - c \gamma_u B_z + \gamma_u \beta_u E_y \end{aligned}$$

$$E'_y = \gamma_u \left( E_y - \frac{c}{\beta_u} \left( 1 - \frac{1}{\gamma_u^2} \right) B_z \right), \quad 1 - \frac{1}{\gamma_u^2} = \beta_u^2$$

$$E'_y = \gamma_u (E_y - c \beta_u B_z)$$

$B'_x = B_x$	$B'_y = \gamma_u \left( B_y + \frac{\beta_u}{c} E_z \right)$	$B'_z = \gamma_u \left( B_z - \frac{\beta_u}{c} E_y \right)$	6
--------------	--	--	---

$F'_x/q = E_x - \frac{\beta_u}{\delta} (\beta_y E_y + \beta_z E_z) + \frac{c}{\delta} (\beta_y B_z - \beta_z B_y)$	$F'_x/q = E'_x + \frac{c}{\gamma_u \delta} (\beta_y B'_z - \beta_z B'_y)$
$F'_y/q = \frac{1}{\gamma_u \delta} E_y + \frac{c}{\gamma_u \delta} (\beta_z B_x - \beta_x B_z)$	$F'_y/q = E'_y + \frac{c}{\gamma_u \delta} \beta_z B'_x - \frac{c}{\delta} (\beta_x - \beta_u) B'_z$
$F'_z/q = \frac{1}{\gamma_u \delta} E_z + \frac{c}{\gamma_u \delta} (\beta_x B_y - \beta_y B_x)$	$F'_z/q = E'_z + \frac{c}{\delta} (\beta_x - \beta_u) B'_y - \frac{c}{\gamma_u \delta} \beta_y B'_x$

**Beachte:**  $\frac{\partial \delta}{\partial \beta_x} = \frac{\partial}{\partial \beta_x} (1 - \beta_u \beta_x) = -\beta_u$

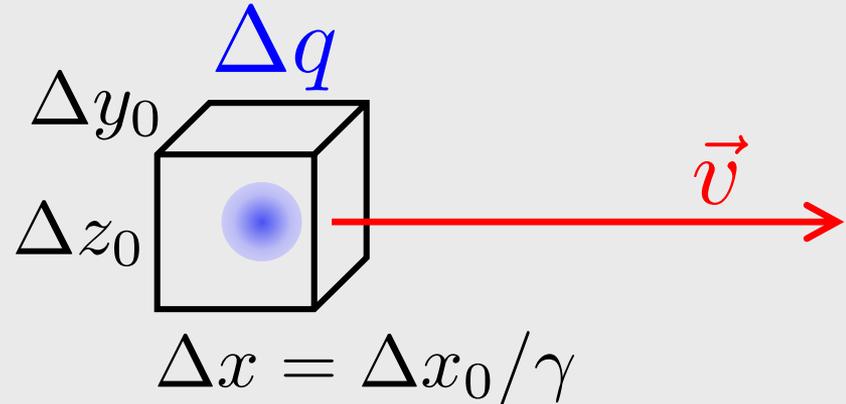
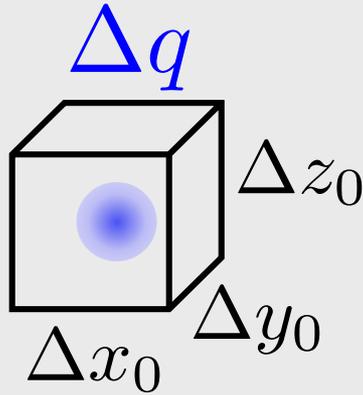
$$\frac{1}{q} \frac{\partial (F'_z \delta)}{\partial \beta_x} = \frac{c}{\gamma_u} B_y \qquad \frac{1}{q} \frac{\partial (F'_z \delta)}{\partial \beta_x} = -\beta_u E'_z + c B'_y$$

$$= -\beta_u E'_z + c \gamma_u B_y + \gamma_u \beta_u E_z$$

$$E'_z = \gamma_u \left( E_z + \frac{c}{\beta_u} \left( 1 - \frac{1}{\gamma_u^2} \right) B_y \right), \quad 1 - \frac{1}{\gamma_u^2} = \beta_u^2$$

$E'_z = \gamma_u (E_z + c \beta_u B_y)$
---

# Ladungsdichte und Stromdichte



Bewegte Ladung:  $\rho = \frac{\Delta q}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \gamma \cdot \underbrace{\frac{\Delta q}{\Delta x_0 \Delta y_0 \Delta z_0}}_{\text{lorentzinvariant}}$

Definition: **Viererstromdichte**  $J = \frac{\Delta q}{\Delta x_0 \Delta y_0 \Delta z_0} U$

⇒ mit  $U$  ist auch  $J$  ein **Vierervektor**

$$\frac{\Delta q}{\Delta x_0 \Delta y_0 \Delta z_0} = \frac{\rho}{\gamma} \quad U = (\gamma, \gamma \vec{\beta}) c$$

$$J = \frac{\Delta q}{\Delta x_0 \Delta y_0 \Delta z_0} U = (\rho c, \rho \vec{\beta} c) = (\rho c, \rho \vec{v})$$

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad \Rightarrow \quad J = (\rho c, \vec{j})$$

Lorentz-Transformation der Viererstromdichte:

$$\rho' c = \gamma_u (\rho c - \beta_u j_x)$$

$$j'_x = \gamma_u (j_x - \beta_u \rho c)$$

$$j'_y = j'_y, \quad j'_z = j_z$$

Beispiel: Invarianz der Maxwell-Gleichung  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}' \vec{E}' &= \frac{\partial E'_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y'} + \frac{\partial E'_z}{\partial z'} = \frac{\partial E_x}{\partial x'} + \frac{\partial E'_y}{\partial y} + \frac{\partial E'_z}{\partial z} \\
 &= \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \gamma_u \frac{\partial}{\partial y} (E_y - c\beta_u B_z) + \gamma_u \frac{\partial}{\partial z} (E_z + c\beta_u B_y) \\
 &= \gamma_u \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\gamma_u \beta_u}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \gamma_u \left( \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) - \gamma_u \beta_u c \left( \operatorname{rot} \vec{B} \right) \Big|_x \\
 &= \gamma_u \operatorname{div} \vec{E} - \gamma_u \beta_u c \left( \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \Big|_x \\
 &= \gamma_u \frac{\rho}{\epsilon_0} - \gamma_u \beta_u c \mu_0 j_x = \frac{\gamma_u \left( \rho - \frac{\beta_u}{c} j_x \right)}{\epsilon_0} \\
 &= \frac{\rho'}{\epsilon_0}
 \end{aligned}$$

# Elektromagnetisches Feld einer bewegten Ladung:

$$E'_x = E_x$$

$$B'_x = B_x$$

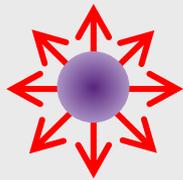
$$E'_y = \gamma_u (E_y - c\beta_u B_z)$$

$$B'_y = \gamma_u (B_y + \frac{\beta_u}{c} E_z)$$

$$E'_z = \gamma_u (E_z + c\beta_u B_y)$$

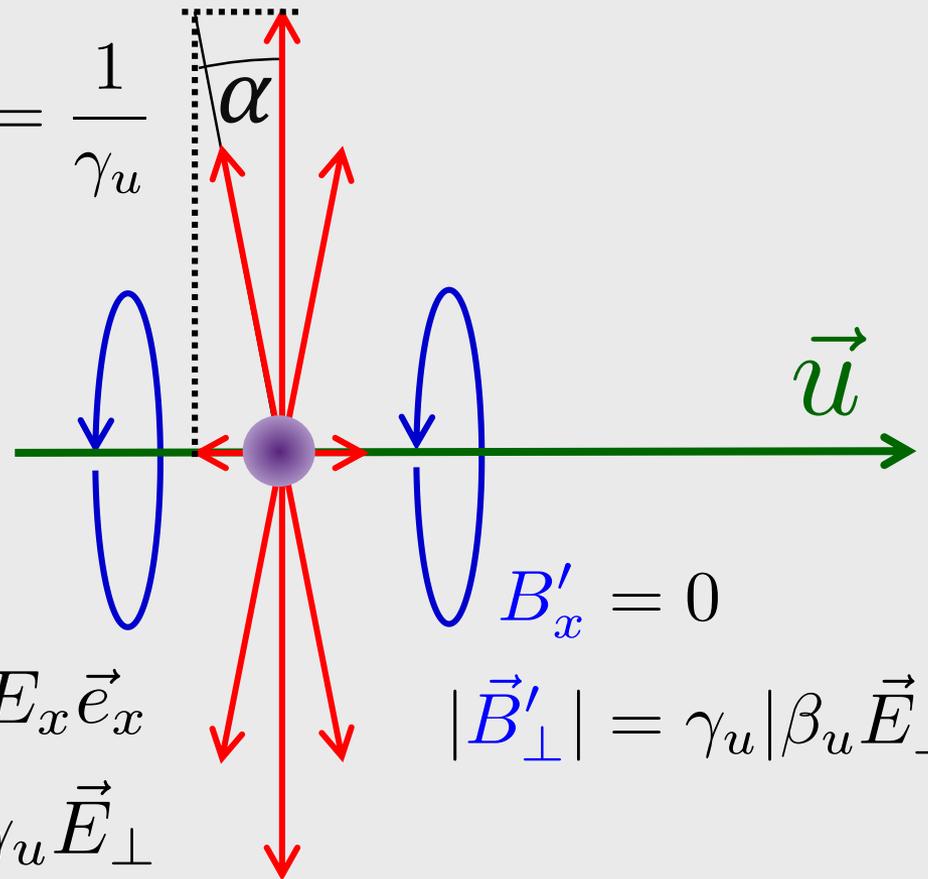
$$B'_z = \gamma_u (B_z - \frac{\beta_u}{c} E_y)$$

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{1}{\gamma_u}$$



$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_r$$

$$\vec{B} = \vec{0}$$



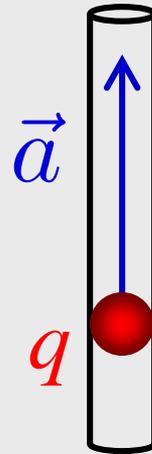
$$\vec{E}' = E_x \vec{e}_x + \gamma_u \vec{E}_\perp$$

$$|\vec{B}'_\perp| = \gamma_u |\beta_u \vec{E}_\perp / c|$$

# Abstrahlung einer beschleunigten Ladung (qualitativ)



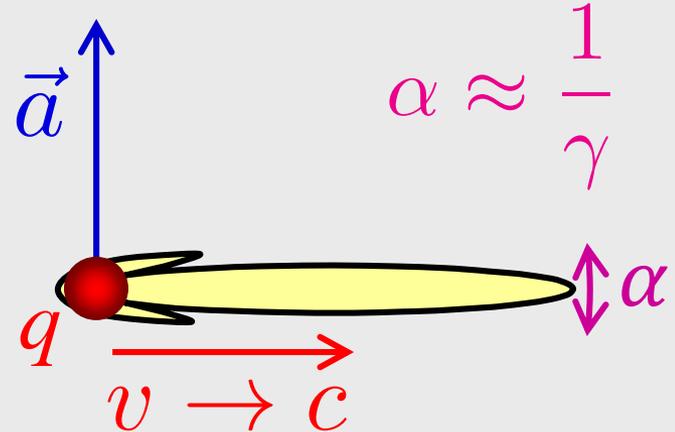
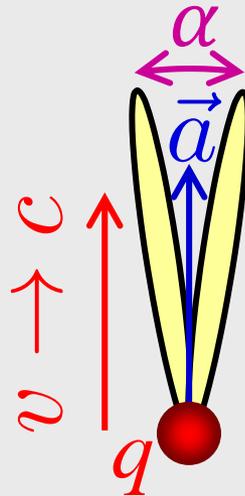
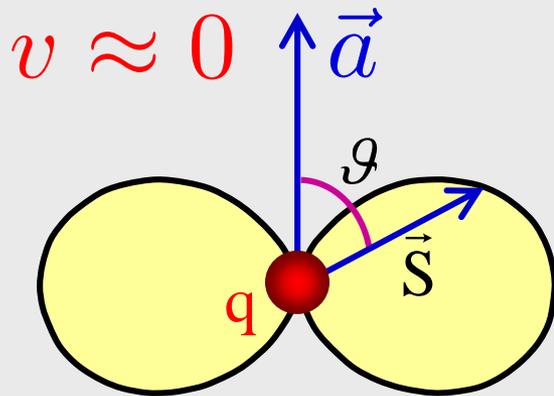
Interpretation



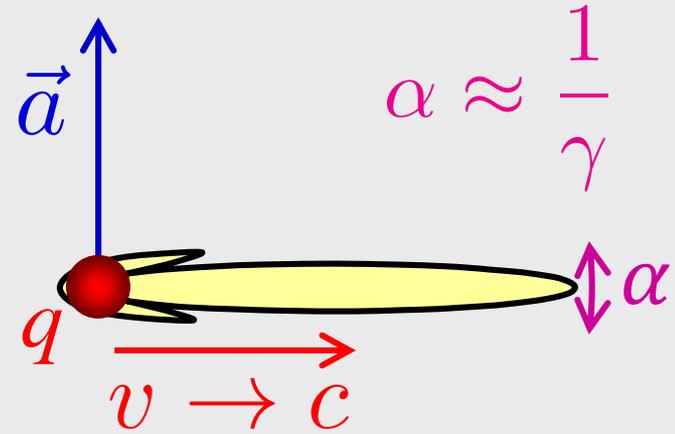
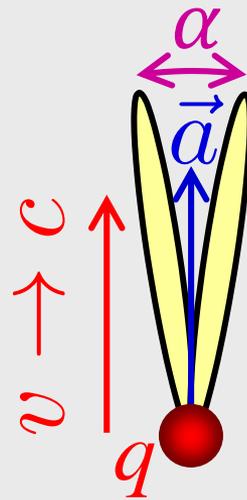
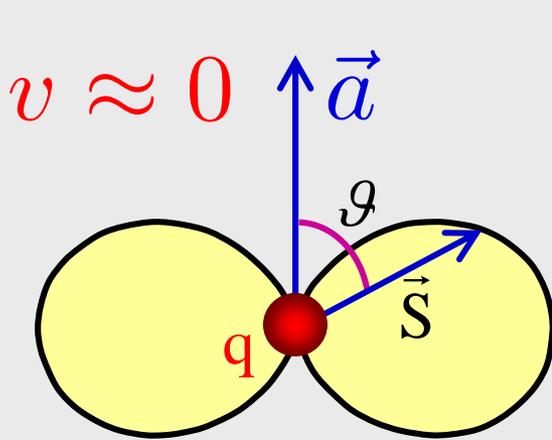
Momentaufnahme eines Hertzschen Dipols

Ladungsschwerpunkt der freien Ladungsträger

Antenne



Beschleunigte hochrelativistische Ladungen strahlen in einem engen Kegel in Bewegungsrichtung.



$$P \propto \left( \frac{d\gamma}{dx} \right)^2$$

Völlig zu vernachlässigen  
gegen Beschleunigungs-  
Leistung

$$P \propto \gamma^4$$

Gewaltige  
Strahlungsleistung  
bei großen  $\gamma$

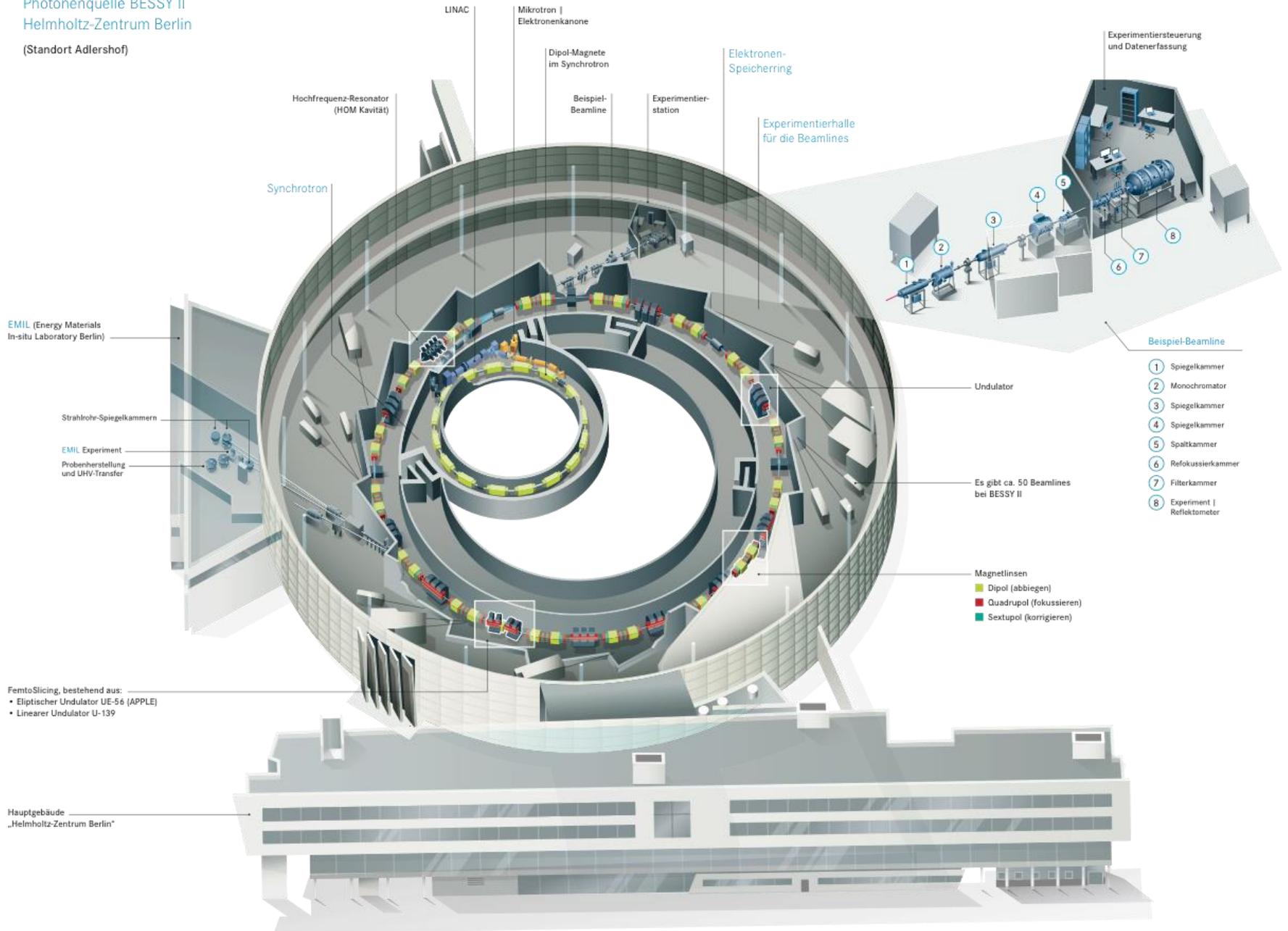
$\gamma \propto E/m \Rightarrow$  Seitlich beschleunigte, leichte geladene  
Teilchen (Elektronen, Positronen)  
strahlen extrem

Anwendung: Synchrotronstrahlung

BESSY II (Adlershof)



Photonenquelle BESSY II  
Helmholtz-Zentrum Berlin  
(Standort Adlershof)



FemtoSlicing, bestehend aus:

- Elliptischer Undulator UE-56 (APPLE)
- Linearer Undulator U-139