Präsenzblatt 1

Bearbeitung: 24. und 25. April 2017

Aufgabe 1: Rechnen mit Vektoren

a) Berechnen Sie für die Vektoren $\vec{a} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y$, $\vec{b} = 2\vec{e}_x + \vec{e}_y$ und $\vec{c} = \vec{e}_x - \vec{e}_y - \vec{e}_z$ das Kreuzprodukt $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ und das Skalarprodukt $\vec{c} \cdot \vec{d}$.

b) In Kugelkoordinaten lauten die Basisvektoren in Richtung von r und φ

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie den dritten Basisvektor $\vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r$.

Aufgabe 2: Flächen- und Volumenintegrale

Betrachten Sie eine Kugel vom Radius $R = 1\,\mathrm{m}$, deren Mittelpunkt mit dem Ursprung des Koordinatensystem zusammenfällt. Im Punkt $(0, 0, R/\sqrt{2})$ wird die Kugel von einer Ebene geschnitten, die parallel zur x-y-Ebene ist.

a) Unter welchem Winkel θ_0 erscheint der Radius des Kreises, den die Ebene aus der Kugel herausschneidet, vom Ursprung aus betrachtet?

b) Berechnen Sie (durch Integration über θ und φ in Kugelkoordinaten) den Raumwinkel (in sr), den der Kreis vom Ursprung aus betrachtet überdeckt.

c) Berechnen Sie die Fläche des Teils der Kugeloberfläche, der sich oberhalb des Kreises befindet.

d) Wie groß ist der gesamte, durch die Ebene überdeckte Raumwinkel?

e) Berechnen Sie (durch Integration in Kugelkoordinaten) das Volumen des Spitzkegels, der durch den Kreis und den Ursprung definiert ist.

f) Überprüfen Sie Ihr Resultat aus der vorigen Teilaufgabe, indem Sie Zylinderkoordinaten verwenden und das Integral so ausführen.

Aufgabe 3: Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes

Betrachten Sie ein Vektorfeld der Form ($C = \text{const.}$)

$$\vec{E} = \frac{C}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} .$$

a) Skizzieren Sie die Form des Felder mit Hilfe von Vektoren und Feldlinien.

b) Berechnen Sie die Divergenz $\text{div}\vec{E}$ des Feldes für $x \neq 0$ und $y \neq 0$.

c) Berechnen Sie die Rotation $\text{rot}\vec{E}$ des Feldes.

Aufgabe 4: Gradient

Betrachten Sie das skalare Feld ($C, D = \text{const.}$)

$$\Phi(x, y) = C \ln \sqrt{x^2 + y^2} + D.$$

a) Berechnen Sie den Gradienten $\text{grad}\,\Phi(x, y)$ in kartesischen Koordinaten.

b) Wiederholen Sie die Rechnung in Zylinderkoordinaten ($\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$). Der Gradient einer sklaren Funktion $V(\rho, \varphi, z)$ in Zylinderkoordinaten lautet

$$\text{grad}(V) = \frac{\partial V}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z .$$