

# 1 Messung

## 1.1 physikalische Größen und Einheiten

### Basisgrößen mit SI-Einheiten

Größe	SI-Einheit	Abkürzung
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Zeit	Sekunden	s
elektrische Stromstärke	Ampere	A
Temperatur	Kelvin	K
Stoffmenge	Mol	mol
Lichtstärke	Candela	cd

Die Einheiten der **abgeleiteten Größen** werden dort angegeben, wo diese eingeführt werden.

## 1.2 Messfehler

$n$  - Anzahl Messungen &  $x_i$  - Ergebnis i-te Messung

Größe	Zeichen	Berechnung
Mittelwert	$\bar{x}$	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
wahrer Wert	$\mu$	durch Mittelwert abschätzbar
mittl. quadr. Fehler d. Einzelmessg.	$s$	$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$
Standardabweichung	$\sigma$	$\sigma \approx s$
Fehler des Mittelwerts	$\Delta\bar{x}$	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$

# 2 Mathematik

## 2.1 Differentiationsregeln

Produktregel:  $f(x) = g(x) \cdot h(x) \rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx} \cdot h(x) + g(x) \cdot \frac{dh}{dx}$

Kettenregel:  $f(u) = g(u)$  mit  $u = h(x) \rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{dg}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

## 2.2 Trigonometrische Funktionen

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

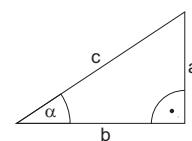
$$\sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\tan(\alpha) = -\tan(-\alpha)$$



## 2.3 Komplexe Zahlen

$$i^2 = -1$$

$$\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

$$e^{i \cdot \alpha} = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

## 2.4 Taylorentwicklung

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0) \cdot (x - x_0)^3 + \dots$$

## 2.5 Vektoren

Gegeben seien die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ :  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Betrag:  $|\vec{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Addition:  $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$

Skalarprodukt:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = a \cdot b \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$

Kreuz- bzw. Vektorprodukt:  $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$ ,  $|\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$

Zeitableitung:  $\dot{\vec{a}} = \frac{d\vec{a}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \\ \dot{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{da_1}{dt} \\ \frac{da_2}{dt} \\ \frac{da_3}{dt} \end{pmatrix}$

## 3 Mechanik

### 3.1 Bewegungslehre

Größe	Zeichen	Berechnung	SI-Einheit
Bahnkurve	$\vec{r}(t)$	$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$	m
Geschwindigkeit	$\vec{v}(t)$	$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$	m/s
Beschleunigung	$\vec{a}(t)$	$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$	m/s <sup>2</sup>

Spezialfall	$\vec{a}(t)$	$\vec{v}(t)$	$\vec{r}(t)$
Gleichförmige Bewegung	0	$\vec{v}_0 = \text{const.}$	$\vec{v}_0 \cdot t + \vec{r}_0$
Gleichm. beschl. Bewegg.	$\vec{a}_0 = \text{const.}$	$\vec{a}_0 \cdot t + \vec{v}_0$	$\frac{\vec{a}_0}{2} \cdot t^2 + \vec{v}_0 \cdot t + \vec{r}_0$

### 3.2 Kraft $\vec{F}$

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ (2. Newtonsches Axiom)	$[\vec{F}] = 1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$ (Newton)
--	--

Alternative Definition:  $\vec{F} = -\vec{\nabla} \cdot \Phi(\vec{r})$  mit  $\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  &  $\Phi(\vec{r})$  - stetiges Potential

Name	Berechnung	Bemerkung
Gewichtskraft	$\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}$	Fallbeschleunigung $\vec{g}$
Federkraft (Hooksches Gesetz)	$\vec{F}_F = -D \cdot \vec{x}$	Federkonstante $D$ , Auslenkung $\vec{x}$
Coulomb-Reibung	$F_R = \mu \cdot F_N$	Reibungszahl $\mu$ , Normalkraft $F_N$

### 3.3 Druck $p$

$p = \frac{ \vec{F}_\perp }{A}$ mit $\vec{F}_\perp$ - Kraft senkrecht zu Fläche $A$	$[p] = 1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ (Pascal)
---	---

### 3.4 Impuls $\vec{p}$

$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	$[\vec{p}] = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$
-----------------------------	---

Verallgemeinerung des zweiten Newtonschen Axioms:  $\vec{F}_{\text{extern}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$  mit  $\vec{F}_{\text{extern}}$  - externe Kräfte

### Schwerpunkt $\vec{r}_S$

$n$  Massen  $m_i$  mit Koordinaten  $r_i$ :  $\vec{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$ .

### zentraler elastischer Stoß

Körper 1 ( $m_1, v_1$ ) und 2 ( $m_2, v_2$ ) bewegen sich entlang der selben Geraden

Geschwindigkeiten nach Stoß:  $v'_1 = \frac{2 \cdot m_2 v_2 + m_1 v_1 - m_2 v_1}{m_1 + m_2}$   $v'_2 = \frac{2 \cdot m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_1 v_2}{m_1 + m_2}$

### 3.5 Arbeit $W$

$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{l}$ mit $\vec{F}$ Kraft auf Körper & Integral über Weg	$[W] = 1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$ (Joule)
--	--

$\vec{F}$  = konstant & geradlinige Bewegung entlang  $\vec{l}$ :  $W = \vec{F} \cdot \vec{l} = F \cdot l \cdot \cos(\angle(\vec{F}, \vec{l}))$

### 3.6 Leistung $P$

$P(t) = \frac{dW(t)}{dt}$	$[P] = 1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$ (Watt)
---------------------------	---

### 3.7 Drehbewegung

Größe	Berechnung	Bemerkung	Vgl. gradl. Bewegg.
Abstand von Drehachse	$\vec{r}$		
Winkel	$\varphi$	$[\varphi] = \text{Bogenmaß}$	$\vec{r}$
Winkelgeschwindigkeit	$\vec{\omega}, \omega = \frac{d\varphi}{dt}$	$\vec{\omega} \perp \text{Drehebene}, [\vec{\omega}] = 1/\text{s}$	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$
Bahngeschwindigkeit	$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$		
Winkelbeschleunigung	$\vec{\dot{\omega}}, \dot{\omega} = \dot{\varphi}$	Ableitg.: $\dot{b} = \frac{db}{dt}$ & $\ddot{b} = \frac{d^2b}{dt^2}$	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$
Drehmoment	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$	$[\vec{M}] = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$	
Drehmoment	$\vec{M} = \dot{\vec{L}}$	Ableitg.: $\dot{b} = \frac{db}{dt}$	$\vec{F} = \dot{\vec{p}}$
Drehimpuls	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$		

**Spezialfall: Kreisbewegung** ( $\vec{v} \perp \vec{r}$  und  $|\vec{r}| = r = \text{const.}$ )

Gleichförmige Kreisbewegung ( $|\vec{v}| = \text{const.}$ ):  $|\vec{a}_{\text{radial}}| = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$  (Zentripetalbeschl.)

Ungleichförmige Kreisbewegung:  $|\vec{a}_{\text{tangential}}| = \frac{d\vec{v}}{dt} = r \cdot \frac{d\omega}{dt}$

einige Vereinfachungen:

Größe	Berechnung	Bemerkung
Radius	$r$	
Bogenlänge	$s = r \cdot \varphi$	
Bahngeschwindigkeit	$v = \omega \cdot r$	
Drehmoment	$\vec{M} = \Theta \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt}$	Trägheitsmoment $\Theta$
Drehimpuls	$\vec{L} = \Theta \cdot \vec{\omega}$	

### Trägheitsmoment

Körper	Berechnung	Bemerkung
Massepunkte	$\Theta = \sum_{i=1}^n r_i^2 \cdot m_i$	$r_i$ Abstände von Drehachse
bel. Körper	$\Theta = \int_{\text{Volumen}} r^2 \cdot dm$	
Vollzylinder	$\Theta = \frac{m}{2} \cdot R^2$	bzgl. Symmetrieachse, $R$ Zylinderradius
Hohlzylinder	$\Theta = m \cdot R^2$	bzgl. Symmetrieachse, $R$ Zylinderradius
Vollkugel	$\Theta = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2$	bzgl. Symmetrieachse, $R$ Kugelradius
Hohlkugel	$\Theta = \frac{2}{3} \cdot m \cdot R^2$	bzgl. Symmetrieachse, $R$ Kugelradius

**Satz von Steiner**  $\Theta_B = m \cdot a^2 + \Theta_A$  mit A - Achse durch Schwerpunkt, B - Achse parallel zu A &  $a$  - Abstand von A zu B

### 3.8 Energie $E$

$E$ (Definitionen in Tabelle)	$[E] = 1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$ (Joule)
-------------------------------	---

Bezeichnung	Berechnung	Bemerkung
kinetische Energie (Translation)	$E_{\text{kin,T}} = \frac{m}{2} \cdot v^2$	
kinetische Energie (Rotation)	$E_{\text{kin,R}} = \frac{\Theta}{2} \cdot \omega^2$	
potentielle Energie (im Gravitationsfeld)	$E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$	Höhe $h$
in Feder gespeicherte Energie	$E_{\text{Feder}} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2$	Dehnung/Stauchung $x$

## 4 Schwingungen und Wellen

### 4.1 Schwingungen

#### Harmonischer Oszillator

hinreichend oft stetig differenzierbares Potential:  $\Phi(\tilde{x})$

Taylorentwicklung (2.4) um  $x_0$ :  $\Phi(\tilde{x}) \approx \underbrace{\Phi(x_0) + \Phi'(x_0) \cdot (\tilde{x} - x_0) + \frac{1}{2} \Phi''(x_0) \cdot (\tilde{x} - x_0)^2 + \dots}_{\Phi(\tilde{x})_{\text{harm}}}$

$x_0$  sei Minimalstelle von  $\Phi(\tilde{x})$ :  $\Phi(\tilde{x})_{\text{harm}} = \Phi(x_0) + \frac{1}{2}\Phi''(x_0) \cdot (\tilde{x} - x_0)^2$

Kraft (3.2):  $F(\tilde{x}) = -\frac{d\Phi(\tilde{x})_{\text{harm}}}{d\tilde{x}} = -\Phi''(x_0) \cdot (\tilde{x} - x_0)$

Analogie zur Federkraft:  $\Phi''(x_0) = D$

Bewegungsgleichung:  $\ddot{x}(t) + \frac{D}{m}x(t) = 0$  mit  $x(t)$  - Auslenkung aus Ruhelage

Allgemeine Lösung:  $x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$  mit  $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$

Andere Schreibweise:  $x(t) = C \cdot e^{\pm i(\omega_0 t + \varphi_0)}$

### Gedämpfte Harmonische Schwingung

Bewegungsgleichung:  $\ddot{x}(t) + \frac{\kappa}{m}\dot{x}(t) + \frac{D}{m}x(t) = 0$

### Getriebene, gedämpfte harmonische Schwingung

Gleichung:  $\ddot{x}(t) + \frac{\kappa}{m}\dot{x}(t) + \frac{D}{m}x(t) = \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega \cdot t)$  mit  $F_0$  - Amplitude treibende Kraft

## 4.2 Wellen

### Wellen in 1D (1D-Schwingung + 1D-Ausbreitung)

Wellengleichung:  $\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t) - c^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t) = 0$

Lösung	Berechnung
Harmonische Wellen	$y(x,t) = A_s \cdot \sin(kx \pm \omega t)$
	$y(x,t) = A_c \cdot \cos(kx \pm \omega t)$
	$y(x,t) = A \cdot e^{i(kx \pm \omega t)}$

Dispersionsrelation:  $w(k)^2 = c^2 k^2$  mit  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  (Wellenzahl)

### Wellen in 3D (3D-Schwingung + 3D-Ausbreitung)

Wellengleichung:  $\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(\vec{r},t) - c^2 \cdot \Delta y(\vec{r},t) = 0$  mit  $\Delta = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$

Lösung	Berechnung
Ebene Wellen	$y(\vec{r},t) = A_c \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)$
Kugelwellen	$y(\vec{r},t) = y(r,t) = \frac{A}{r} \cdot \cos(k \cdot r \pm \omega t)$

Dispersionsrelation:  $w(k)^2 = c^2 |\vec{k}|^2$  mit  $\vec{k}$  mit  $|\vec{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda}$  (Wellenzahlvektor)

### 4.3 Dopplereffekt

$f$  - Frequenz der Quelle,  $c$  - Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle,  $v$  - Geschwindigkeit Quelle bzw. Beobachter,  $\tilde{f}$  - vom Beobachter wahrgenommene Frequenz

bewegte Quelle, ruhender Beobachter	bewegter Beobachter, ruhende Quelle
auf Beobachter zu: $\tilde{f} = \frac{1}{1-\frac{v}{c}} \cdot f$	auf die Quelle zu: $\tilde{f} = \left(1 + \frac{v}{c}\right) \cdot f$
von Beobachter weg: $\tilde{f} = \frac{1}{1+\frac{v}{c}} \cdot f$	von der Quelle weg: $\tilde{f} = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \cdot f$

## 5 Flüssigkeiten und Gase

### 5.1 Dichte und Druck

Dichte  $\rho$

$\rho = \frac{m}{V}$ mit $m$ - Masse & $V$ - Volumen	$[\rho] = 1 \text{ kg/m}^3$
--	-----------------------------

Schweredruck  $p$  (innerhalb des Fluids)

$p = \rho \cdot h \cdot g$ mit $h$ - Höhe Flüssigkeitssäule, $\rho$ - Dichte & $g$ - Fallbeschleunigung	siehe 3.3
---	-----------

Auftriebskraft  $F$  (nach Abzug der Gewichtskraft)

$F = g \cdot V \cdot (\rho_F - \rho_K)$ mit $V$ - Volumen Körper & $\rho_F / \rho_K$ - Dichte Flüssigkeit / Körper
--

### 5.2 strömende Flüssigkeiten und Gase

Strom

Größe	Zeichen	Berechnung	Einheit
Stromstärke	$I$	$I = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\text{transportiertes Volumen}}{\text{benötigte Zeit}}$	$\text{m}^3/\text{s}$
Strömungswiderstand	$R$	$R = \frac{\Delta p}{I} = \frac{\text{Druckdifferenz}}{\text{Stromstärke}}$	$\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^5$
Leitwert	$S$	$S = \frac{1}{R}$	$\text{m}^5/(\text{N} \cdot \text{s})$

Kontinuitätsbedingung (für stationäre Strömung durch Rohr)

$A_1 \cdot u_1 = A_2 \cdot u_2$ mit $A_1$ bzw. $A_2$ - Rohrquerschnitt & $u_1$ bzw. $u_2$ - Fließgeschwindigkeit
--

Satz von Bernoulli (für stationäre Strömung in idealer Flüssigkeit)

$p$  - Druck,  $\rho$  - Dichte,  $u$  - Fließgeschwindigkeit,  $g$  - Fallbeschleunigung &  $h$  - Höhe

$p + \frac{1}{2}\rho \cdot u^2 + \rho \cdot g \cdot h = \text{konstant}$
--

Hagen-Poiseuille'sches Gesetz (laminare Strömung durch Rohr)

$I = \frac{\pi}{8\eta} \left  \frac{\Delta p}{\Delta L} \right  r^4$ mit $r$ - Rohrradius, $\eta$ - dynamische Viskosität & $\frac{\Delta p}{\Delta L}$ - $\frac{\text{Druckänderung}}{\text{Länge}}$
---

Stokes'sche / viskose Reibungskraft  $F_S$  (Kugel in laminarer, stationärer Strömung)

$F_S = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$ mit $\eta$ - dynamische Viskosität, $r$ - Kugelradius & $v$ - Fließgeschwindigkeit
--

Turbulenter Strömungswiderstand  $F_t$

$F_t = \frac{1}{2}c_W \cdot A \cdot \rho \cdot v^2$ mit $c_W$ -Wert, $A$ - Querschnittsfläche, $\rho$ - Dichte & $v$ - Geschwindigkeit
--

Reynoldszahl  $Re$  (Verhältnis turbulente Reibung / viskose Reibung)

$Re = \frac{\rho}{\eta} \cdot v \cdot r$ mit $\rho$ - Dichte, $\eta$ - dyn. Viskosität, $v$ - Geschwindigkeit & $r$ - Kugelradius
---