Lösung

1)

$$\begin{aligned}\dot{n}_1 &= \gamma_{31}n_3 + \gamma_{21}n_2 - W_{13}(n_1 - n_3)\\ \dot{n}_2 &= \gamma_{32}n_3 - \gamma_{21}n_2\\ \dot{n}_3 &= -(\gamma_{32} + \gamma_{31})n_3 + W_{13}(n_1 - n_3)\end{aligned}$$

2)
- steady state: $\dot{n}_i = 0$ and $g_{32} = \gamma_{32}/\gamma_{21}$, $g_{31} = \gamma_{31}/\gamma_{21}$:

$$\begin{aligned}0 &= g_{31}n_3 + n_2 - W_{13}/\gamma_{21}(n_1 - n_3)\\ 0 &= g_{32}n_3 - n_2\\ 0 &= -(g_{32} + g_{31})n_3 + W_{13}/\gamma_{21}(n_1 - n_3)\end{aligned}$$

- $n'_i = n_i/n_{tot}$, $n'_0 = n'_2 + n'_1$, $n' = n'_2 - n'_1$:

$$\begin{aligned}0 &= g_{31}n'_3 + \frac{n'_0 + n'}{2} - W_{13}/\gamma_{21}(\frac{n'_0 - n'}{2} - n'_3)\\ 0 &= g_{32}n'_3 - \frac{n'_0 + n'}{2}\\ 0 &= -(g_{32} + g_{31})n'_3 + W_{13}/\gamma_{21}(\frac{n'_0 - n'}{2} - n'_3)\end{aligned}$$

- $g_{32} = \eta \cdot g_3$ and $g_{31} = (1-\eta) \cdot g_3$:

$$\begin{aligned}0 &= (1-\eta)g_3n'_3 + \frac{n'_0 + n'}{2} - W_{13}/\gamma_{21}(\frac{n'_0 - n'}{2} - n'_3)\\ 0 &= \eta g_3n'_3 - \frac{n'_0 + n'}{2}\\ 0 &= -g_3n'_3 + W_{13}/\gamma_{21}(\frac{n'_0 - n'}{2} - n'_3)\end{aligned}$$

- Setze $W := W_{13}/\gamma_{12}$ und sortiere:

$$\begin{aligned}0 &= (1-\eta+W)n'_3 + \frac{1-W}{2}n'_0 + \frac{1+W}{2}n'\\ 0 &= \eta g_3n'_3 + \frac{1}{2}n'_0 - \frac{1}{2}n'\\ 0 &= -(g_3 + W)n'_3 + \frac{W}{2}n'_0 - \frac{W}{2}n'\end{aligned}$$

3)
Löse Gleichungssystem:

$$1 = n'_3 + n'_0 \tag{1}$$

$$0 = \eta g_3n'_3 - \frac{1}{2}n'_0 - \frac{1}{2}n' \tag{2}$$

$$0 = -(g_3 + W)n'_3 + \frac{W}{2}n'_0 - \frac{W}{2}n' \tag{3}$$

- (3) $- W \cdot$ (2):

$$0 = -(W\eta g_3 + g_3 + W)n'_3 + Wn'_0 \tag{4}$$

- $W \cdot$ (1) $-$ (4):

$$W = (W\eta g_3 + g_3 + 2W)n'_3 \tag{5}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} n'_3 &= \frac{W}{W\eta g_3 + g_3 + 2W} \\ n'_0 &= \frac{W\eta g_3 + g_3 + W}{W\eta g_3 + g_3 + 2W} \\ n' &= \frac{W\eta g_3 - g_3 - W}{W\eta g_3 + g_3 + 2W} \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} n'_3 &= \frac{W}{W\eta g_3 + g_3 + 2W} \\ &= \frac{W/g_3}{\eta g_3 \, W/g_3 + 2W/g_3 + 1} \end{aligned}$$

n'_3 kann vernachlässigt werden, wenn $n'_3 \ll 1$:
- dies ist der Fall, wenn $W/g_3 \ll 1$. Das bedeutet aber, dass weniger in den höheren Zustand gepumpt wird, als daraus zerfällt.
- sinnvolle Bedingung für einen Laser ist $W/g_3 \gg 1$. Dann kann die Formel für n'_3 vereinfacht werden zu $n'_3 = \frac{1}{\eta g_3 + 2}$. Somit ist $n'_3 \ll 1$ erfüllt, wenn $\eta g_3 \gg 1$ bzw. $\gamma_{32} \gg \gamma_{21}$. Also wenn der Zerfall von Niveau 3 in Niveau 2 deutlich schneller abläuft als der Zerfall von Niveau 2 in Niveau 1.

5)
Besetzungsinversion besteht, wenn $n' > 0$

$$\begin{aligned} n' &= \frac{W\eta g_3 - g_3 - W}{W\eta g_3 + g_3 + 2W} \\ &= \frac{yx - x - 1}{yx + 2x + 1} \end{aligned}$$

mit $x = W/g_3$ und $y = \eta g_3$.

$$n' > 0 \quad \rightarrow \quad yx - x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x > \frac{1}{y-1}$$

Einsetzen der Bedingung aus 4) $y = \eta g_3 \gg 1$:

$$x > \frac{1}{y} \quad \rightarrow \quad \frac{W}{g_3} > \frac{1}{\eta g_3} \quad \rightarrow \quad \eta W > 1 \quad \rightarrow \quad \underline{\eta W_{13} > \gamma_{21}}$$