Blatt 7

1) Energieerhaltung: $E_{pot}^{Start} = E_{kin}^{Ende} + E_{pot}^{Ende} = E_{trans}^{Ende} + E_{rot}^{Ende} + E_{pot}^{Ende}$

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\theta_i\omega^2 + mgh_{1/2}$$

$$mg(h_0 - h_{1/2}) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\theta_i\omega^2$$

$$\begin{cases} \theta_{voll} = \frac{1}{2}mR^2 \\ \theta_{Hohl} = mR^2 \end{cases} \quad v = R\omega$$

Vollzylinder $v_{voll} = \sqrt{\frac{4}{3}g(h_0 - h_{1/2})}$ (Vorlesung)

Hohlzylinder

$$mg(h_0 - h_{1/2}) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\underbrace{mR^2}_{\theta_{Hohl}}\underbrace{\left(\frac{v}{R}\right)^2}_{v^2}$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$= mv^2$$

$$v_{Hohl} = \sqrt{g(h_0 - h_{1/2})}$$

Translationsgeschwindigkeit bei $h_1 = 1m$

$v_{voll} = 5{,}16\,\frac{m}{s} \approx \underline{\underline{5{,}2\,\frac{m}{s}}}$

$v_{Hohl} = \cancel{3{,}16\,\frac{m}{s} \approx 3{,}2\,\frac{m}{s}}$
$= 4{,}47\,\frac{m}{s} \approx \underline{\underline{4{,}5\,\frac{m}{s}}}$

bei $h_2 = 0m$

$v_{voll} = 6{,}32\,\frac{m}{s} \approx \underline{\underline{6{,}3\,\frac{m}{s}}}$

$v_{Hohl} = 5{,}48\,\frac{m}{s} \approx \underline{\underline{5{,}5\,\frac{m}{s}}}$

2)

a) $l - h = \cos\varphi \cdot l$

$\underline{h = l(1-\cos\varphi)}$

b) $E_{pot} = mgh$

$= mgl(1-\cos\varphi)$

$\underline{= mgl\left(1-\cos\left(\frac{x}{l}\right)\right)}$

c) $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots$

$$\phi(x) \approx \underbrace{\phi(x_0=0) + \phi'(x_0=0)\,x + \frac{1}{2}\phi''(x_0=0)\,x^2 + \dots}_{\phi_{Harm}(x)}$$

$$\phi_{Harm}(x) = mgl\left\{\underbrace{(1-1)}_{0} + \underbrace{\frac{1}{l}\sin\left(\frac{0}{l}\right)x}_{0} + \frac{1}{2}\frac{1}{l^2}\underbrace{\cos\left(\frac{0}{l}\right)}_{1}x^2\right.$$

$$\underline{\underline{= \frac{mg}{2l}x^2}}$$

d) $F_R = -\frac{d\phi_{Harm}(x)}{dx} = \underline{\underline{-mg\frac{x}{l}}}$

$ma = F_R$

$m\ddot{x} = -mg\frac{x}{l}$

$\underline{\underline{\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0}}$ entspricht dem in der Vorlesung für kleine Auslenkungen erhaltenem Resultat

3)

a) $x(t) = A\sin(\omega t)$
$\dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t)$
$\ddot{x}(t) = -A\omega^2\sin(\omega t)$

in die Gleichung einsetzen.

$$-mA\omega^2\sin(\omega t) + kA\sin(\omega t) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = m\omega^2$$

b) i) $x(t) = B\cos(\omega t)$
$\dot{x}(t) = -B\omega\sin(\omega t)$
$\ddot{x}(t) = -B\omega^2\cos(\omega t)$

$\Rightarrow -B\omega^2\cos(\omega t) + \omega^2 B\cos(\omega t) = 0$
$0 = 0$ ✓

ii) $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$
$\dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$
$\ddot{x}(t) = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0)$

$\Rightarrow -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0) + \omega^2 A\sin(\omega t + \varphi_0) = 0$
$0 = 0$ ✓

iii) $x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$
$\dot{x}(t) = A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t)$
$\ddot{x}(t) = -A\omega^2\sin(\omega t) - B\omega^2\cos(\omega t)$

$\Rightarrow -A\omega^2\sin(\omega t) - B\omega^2\cos(\omega t) + \omega^2(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t))$
$0 = 0$ ✓

iv) $x(t) = Ae^{i(\omega t + \varphi_0)}$
$\dot{x}(t) = Ai\omega e^{i(\omega t + \varphi_0)}$
$\ddot{x}(t) = Ai^2\omega^2 e^{i(\omega t + \varphi_0)} = -A\omega^2 e^{i(\omega t + \varphi_0)}$
mit $i^2 = -1$

$\Rightarrow -A\omega^2 e^{i(\omega t + \varphi_0)} + \omega^2 Ae^{i(\omega t + \varphi_0)}$
$0 = 0$ ✓

4)

$A = 0{,}8\,cm = \underline{8 \cdot 10^{-3}\,m}$

$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{200\,ms} = \frac{1}{0{,}2\,s} = \underline{5\,Hz}$

$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \rightarrow D = \omega^2 m = 4\pi^2 f^2 m = 4\pi^2\, 25\, \frac{1}{s^2}\, 1\,kg \approx \underline{\underline{987\,\frac{N}{m}}}$

$x = A \sin(\omega t) \rightarrow v = A\omega \cos(\omega t) \rightarrow v_{max} = A\omega = 8 \cdot 10^{-3}\,m \cdot 2\pi \cdot 5\,\frac{1}{s} \approx 0{,}25\,\frac{m}{s} = \underline{\underline{25\,\frac{cm}{s}}}$

$E_{Ges} = \frac{m}{2} v_{max}^2 = \frac{m}{2} A^2 4\pi^2 f^2 = \frac{1\,kg}{2}\, 64 \cdot 10^{-6}\,m^2\, 4\pi^2\, 25\, \frac{1}{s^2} \approx \underline{\underline{0{,}032\,J}}$

oder

$E_{Ges} = \frac{D}{2} A^2 = \frac{\omega^2 m}{2} A^2 = \frac{m}{2} A^2 4\pi^2 f^2 =$ siehe oben