Blatt 9 Lösungen

1. Aufgabe

- Berechne zweite Ableitung von y nach x

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A \cdot \sin(kx - \omega \cdot t)\right)$$

$$= A \cdot \cos(kx - \omega t)\, \frac{\partial}{\partial x}(kx - \omega t)$$

$$= k \cdot A \cdot \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \cdot A \cdot \cos(kx - \omega t)\right)$$

$$= -kA \sin(kx - \omega t) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(kx - \omega t)$$

$$= -k^2 A \cdot \sin(kx - \omega t)$$

- Berechne zweite Ableitung von y nach t

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(A \cdot \sin(kx - \omega t)\right)$$

$$= A \cdot \cos(kx - \omega t) \cdot \frac{\partial}{\partial t}(kx - \omega t)$$

$$= -\omega A \cdot \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\omega A \cdot \cos(kx - \omega t)\right)$$

$$= \omega A \sin(kx-\omega t) \frac{\partial}{\partial t}(kx-\omega t)$$

$$= -\omega^2 A \cdot \sin(kx-\omega t)$$

- Ergebnisse in Wellengleichung einsetzen

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$-k^2 A \cdot \sin(kx-\omega t) = \frac{1}{v^2}\left(-\omega^2 \cdot A \cdot \sin(kx-\omega t)\right) \quad |: -A \cdot \sin(kx-\omega t)$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$$

$$v^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$$

Die gegebene Wellenfunktion ist eine Lösung der Wellengleichung, wenn die Beziehung $v^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$ gilt.

2 Aufgabe

a) Die Welle breitet sich in + x-Richtung aus

b) $V = \frac{\omega}{k} = \frac{7\,s^{-1}}{4{,}4\,m^{-1}} = \underline{\underline{1{,}59\,\frac{m}{s}}}$

c) $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{4{,}4\,m^{-1}} = \underline{\underline{1{,}43\,m}}$

$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{7\,s^{-1}}{2\pi} = \underline{\underline{1{,}11\,Hz}}$

$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = \underline{\underline{0{,}9\,s}}$

d)

$\underline{\underline{A = 0{,}06\,m}}$

e) $v_x = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cdot \cos(kx - \omega t)$

maximale Geschwindigkeit, wenn $\cos(kx-\omega t)$ den Wert ± 1 annimmt.

$v_{x,max} = \omega \cdot A = 7\,s^{-1} \cdot 0{,}06\,m = \underline{\underline{0{,}42\,\frac{m}{s}}}$

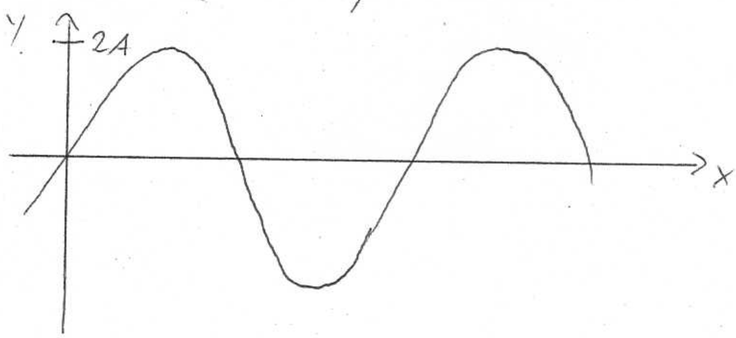
3. Aufgabe

a)

$$y = y_1 + y_2$$

$$= A \cdot \sin(\omega t - kx) + A \cdot \sin(\omega t - k \cdot x)$$

$$= 2A \cdot \sin(\omega t - k \cdot x)$$



b)

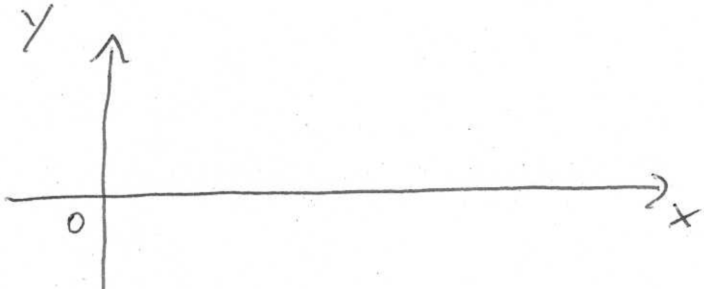
$$y = y_1 + y_2$$

$$= A \cdot \sin(\omega t - kx) + A \cdot \sin(\omega t - kx + \pi)$$

$$= A \cdot \left(\sin(\omega t - kx) + \sin\left(\omega t - kx + \pi\right)\right)$$

$$= A \cdot \left(2 \cdot \sin\left(\frac{\omega t - kx + \omega t - kx + \pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega t - kx - (\omega t - kx + \pi)}{2}\right)\right)$$

$$= A \cdot \left(2 \cdot \sin\left(\frac{2\omega t - 2kx + \pi}{2}\right) \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)}_{=0}\right) = 0$$



c) $y = y_1 + y_2$

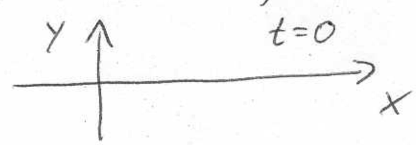
$$= A \cdot \sin(\omega t - kx) + A \cdot \sin(\omega t + kx)$$

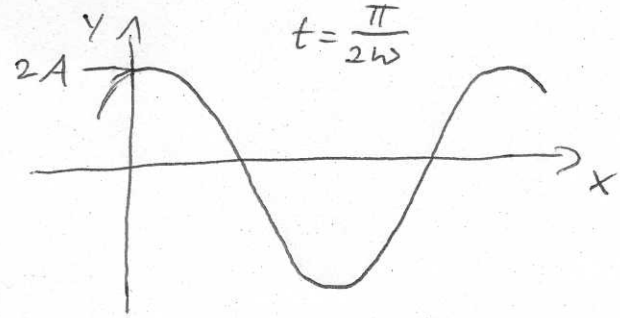
$$= A \cdot (\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t + kx))$$

$$= A\left(2 \cdot \sin\left(\frac{\omega t - kx + \omega t + kx}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega t - kx - (\omega t + kx)}{2}\right)\right)$$

$$= A \cdot (2 \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(kx))$$

$$= 2 \cdot A \cdot \cos(kx) \cdot \sin(\omega t)$$





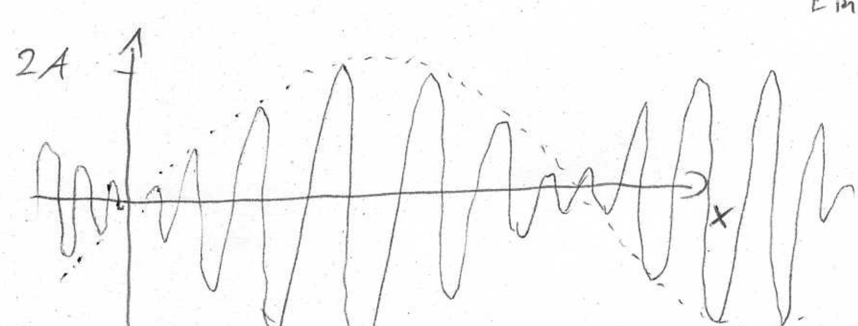
d) $y = y_1 + y_2$

$$= A \cdot \sin(\omega_1 t - k_1 x) + A \cdot \sin(\omega_2 t - k_2 x)$$

$$= A \cdot (\sin(\omega_1 t - k_1 x) + \sin(\omega_2 t - k_2 x))$$

$$= A \cdot \left(2 \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 t - k_1 x + \omega_2 t - k_2 x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 t - k_1 x - \omega_2 t + k_2 x}{2}\right)\right)$$

$$= A \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x}{2}\right) \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{(\omega_1 - \omega_2) \cdot t - (k_1 - k_2)x}{2}\right)}_{\text{Einhüllend, Schwebung}}$$



4. Aufgabe

a)

$$y(x,t) = A \cdot \sin(kx - \omega t)$$

Ausbreitung in + x-Richtung!

Die gezeigte Welle ist bei $x=0$ zum Zeitpunkt $t=0$ bei $y=0$. ⇒ Sinusfunktion

Die Welle breitet sich in + x-Richtung aus ⇒ $kx-\omega t$

Zum Zeitpunkt $t=0$ steigt das Wasser hinter der Wellenmaschine zu einem Wellenberg $y(x,0) = A \cdot \sin(kx)$ ✓

Die Lösung $\omega t - kx$ führt zu einem Wellental ~~und~~ ist falsch.

b)

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{1{,}3\ \frac{m}{s}}{2\ m} = \underline{\underline{0{,}65\ Hz}}$$

c)

$$y(x=2{,}25m, t=4{,}43s) = 0{,}5m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{2m} \cdot 2{,}25m - 2\pi \cdot 0{,}65s^{-1} \cdot 4{,}43s\right)$$

$$= \underline{\underline{0{,}5\ m}}$$