1.Aufgabe (7 Punkte)

a)

In x-Richtung handelt es sich um eine gleichförmige Bewegung.

In y-Richtung handelt es sich um eine gleichmäßig beschleunigte/verzögerte Bewegung.

2D-Vektorausdruck:

$$\overrightarrow{r_{Ball}}(t) = v_0 \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{g}{2} t^2 \end{pmatrix}$$

b)

Zeit bis der Ball wieder auf dem Boden aufkommt:

$$0 = v_0 t \sin\alpha - \frac{g}{2} t^2$$

$$t_{Flug} = \frac{2\, v_0 \sin\alpha}{g}$$

Mit α=30°, g=10m/s² und v_0=70km/h ≈ 19,4m/s ergibt sich: t_{Flug} ≈ 1,94 s

Mit Hilfe der x-Komponente kann man nun die Flugweite errechnen zu:

$$l_{Flug} = x_{Ball}(t_{Flug}) = v_0 \cos\alpha * 2s$$

$$l_{Flug} \cong 34.6m$$

c)

Wir setzten die Formel für die Flugdauer t_{Flug} in die Formel der Flugweite l_{Flug} ein und erhalten:

$$l_{Flug} = \frac{2\cos\alpha \sin\alpha\, v_0^2}{g}$$

Nach v_0 Umstellen bringt:

$$v_0 = \sqrt{\frac{g\, l_{Flug}}{2\cos\alpha\sin\alpha}}$$

Durch einsetzen der Zahlen kann man die minimale Anfangsgeschwindigkeit des Balles zum Überwinden des Teiches ausrechnen:

$$v_0^{min} \cong 28{,}4\, m/s$$

d)

Umstellen der Formel für l_{Flug} nach α ergibt

$$\cos(\alpha)\sin(\alpha) = \frac{l_{Flug}\, g}{2v_0^2}$$

Benutzen der trigonometrischen Identität: $\cos(\alpha)\sin(\alpha) = \frac{1}{2}\sin(2\alpha)$

…und weiteres Umstellen führt zu einem Ausdruck für α von:

$$\alpha = \frac{1}{2}\arcsin(\frac{l_{Flug}\, g}{v_0^2})$$

Mit Parametern von l_{Flug}=90m, g=10m/s^2 und v_0=30m/s ergibt sich ein Aufschlagwinkel von: $\alpha = 45°$

2. Aufgabe (7 Punkte)

a)

Mit der Erdmasse M, dem Orbitradius R und der Gravitationskonstanten G ergibt sich für die Gravitationsbeschleunigung g:

$$\left|\vec{F}_g\right| = G\frac{M}{R^2}m = gm$$

Die resultierenden Werte für die verschiedenen Höhen sind:

$$g_{200km} = 6.637x10^{-11} \frac{m^3}{s^2 kg} \frac{6x10^{24} kg}{(1000*(6378+200)m)^2} \approx 9,2 \frac{m}{s^2}$$

$$g_{35.786km} = 6.637x10^{-11} \frac{m^3}{s^2 kg} \frac{6x10^{24} kg}{(1000*(6378+35786)m)^2} \approx 0,2 \frac{m}{s^2}$$

$$g_{384.400km} = 6.637x10^{-11} \frac{m^3}{s^2 kg} \frac{6x10^{24} kg}{(1000*(6378+384400)m)^2} \approx 0,003 \frac{m}{s^2}$$

b)

Die Umlaufgeschwindigkeit ergibt sich aus dem Gleichgewicht von Gravitationskraft und Zentripetalkraft $\left|\vec{F}_g\right| = \left|\vec{F}_r\right|$ über

$m\frac{v^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2}$ zu: $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

Der Orbit des Radius r hat einen Umfang von U=2π r. Die Umlaufzeit ergibt damit über T=U/v zu:

$$T_{384.400km} = \frac{2\pi * r}{\sqrt{\frac{GM}{r}}} \approx 2,43x10^6 s$$

$$T_{35.786km} \approx 86.205s$$

$$T_{200km} \approx 5.312s$$

c)

Mit gegebenen Umlaufzeiten und Bahnradien ergibt sich die Bahngeschwindigkeit zu: v=U/T

Für Io erhält man einen Wert von $v_{IO} = \frac{2\pi * r}{T} = 2\pi \frac{420000}{1,7d * 86400d/s} \approx 18 \frac{km}{s}$

Für Europa ergibt sich ein Wert von $v_{IO} \approx 13,9 \frac{km}{s}$

d)

Aus dem Kräftegleichgewicht der Europabahn ergibt sich direkt:

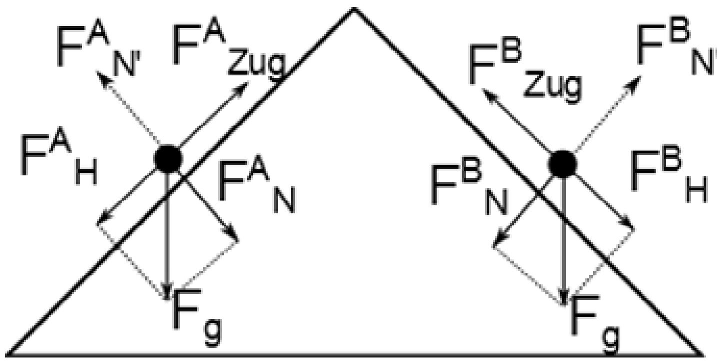
$$m_{Europa}\frac{v^2}{r}=G\frac{m_{Jupiter}m_{Europa}}{r^2}$$

Umstellen nach der Jupitermasse und einsetzen der Zahlenwert ergibt:

$$m_{Jupiter}=\frac{rv^2}{G}\approx 2\times 10^{27}\,kg$$

3. Aufgabe (6 Punkte)

a)



b)

Actio = Reactio

$$\left|\vec{F}^{A}_{Zug}\right|=\left|\vec{F}^{B}_{Zug}\right|=F$$

$$a_{AB}=\frac{F}{m_A}=\frac{F}{m_B}=a_{BA}$$

Es werden also bei konstanter Masse immer beide Schlitten gleich stark beschleunigt und kommen daher auch zeitgleich am Gipfel an (bei gleicher anfänglicher Entfernung).

c.)

Die den Schlitten effektiv nach oben transportierende Kraft wird durch die Hangabtriebskraft verringert.

$$F = F_{Zug}^{A} - F_{H}^{A} = 450N - 80kg * 10m/s^2 * \sin 30° = 50N$$

Die Beschleunigung der beiden Schlitten ergibt sich damit zu:

$$a = \frac{F}{m} \approx 0{,}625m/s^2$$

Die Bahnkurve einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung ist $s = \frac{a}{2}t^2$

Die beiden Schlitten erreichen bei konstanter Beschleunigung *a* den Berggipfel nach der Zeit:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{200m}{0{,}625m/s^2}} \approx 17{,}9s$$