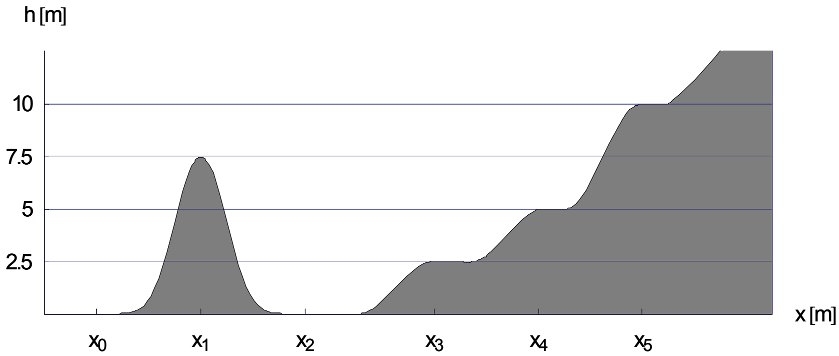
1. Aufgabe **(7 Punkte)**

Eine Kiste (m = 1kg, Massepunkt) wird am Startpunkt x_0 von einer vorgespannten Treibfeder (D=600 kg/s²) nach rechts angetrieben. Anschließend gleitet sie reibungsfrei im Schwerefeld der Erde (g = 10m/s²) wie in der Skizze dargestellt zunächst über einen Berg (x_1) und anschließend über verschieden Anhöhen (x_3,x_4,x_5).



a) Geben sie die Formel an, die beschreibt wieviel potentielle Energie in Abhängigkeit von der Federkonstante D und der Stauchung/Dehnung x in der Feder gespeichert ist! Berechnen Sie ausgehend von der Energieerhaltung, wie stark die Feder mindestens gespannt sein muss, damit die Kiste über den Berg bei x_1 kommt.

b) Die Kiste habe nun beim Punkt x_0 eine Geschwindigkeit v_0 = 15m/s. Tragen Sie in die folgende Tabelle die jeweiligen Werte ein und geben sie jeweils einmal die entsprechende Formel an. Welche Höhe kann die Kiste maximal erreichen?

Position x	Höhe h [m]	$E_{ges.}$ [J]	E_{pot} [J]	E_{kin} [J]	v(x) [m/s]
X_0					
X_1					
X_2					
X_3					
X_4					
X_5					

c) Zeigen Sie mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes, dass für die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Höhe folgende Formel gilt:

$$v(h) = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

2. Aufgabe **(6 Punkte)**

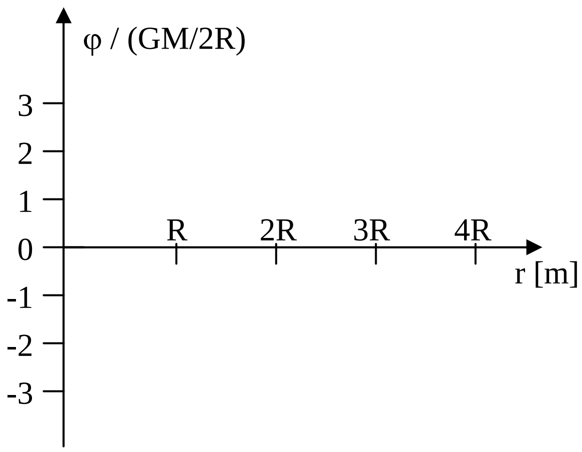
Das Erdpotential kann eindimensional angenährt werden durch die folgenden Formeln:

$$\varphi_i(r) = \frac{GM}{2R}\left(\frac{r^2}{R^2} - 3\right) \qquad \text{für } r < R = \text{Erdradius}$$

$$\varphi_a(r) = -\frac{GM}{r} \qquad \text{für } r \geq R$$

a) Zeigen Sie, dass die beiden Potentiale am Punkt r = R gleich sind.

b) Stellen Sie den Potentialverlauf in dem abgebildeten Diagramm dar.



c) Leiten Sie aus dem Potentialverlauf die wirkende Anziehungskraft für r < R und r < R her.

d) Beschreiben stichpunktartig was passieren würde, wenn man in ein luftleeres Loch, welches durch die gesamt Erde einschließlich Erdmittelpunkt gebohrt wurde, einen Stein wirft. Nehmen sie Bezug auf den Verlauf der Stärke der Anziehungskraft, und gehen Sie dabei auf die Punkte r=R, r=R/2, r=0, r=-R/2 und r=-R ein.

3. Aufgabe **(7 Punkte)**

Ein Schlitten (S_1) der Masse m_1 trifft mit einer Geschwindigkeit v_1 auf einen ruhenden Schlitten (S_2, v_2=0) der Masse m_2. Nach dem elastischen Stoß ist der erste Schlitten (S_1) halb so schnell wie vor dem Stoß ($v'_1 = v_1/2$). Reibungskräfte können vernachlässigt werden.

a) Welcher Unterschied besteht zwischen elastischen und unelastischen Stoß in Bezug auf die Energieerhaltung?

b) Leiten Sie aus dem Impulserhaltungssatz her, dass für die Masse des zweiten Schlittens $m_2 = (m_1v_1)/(2\ v'_2)$ gilt

c) Benutzen Sie $m_2 = (m_1v_1)/(2\ v'_2)$ um mittels Energieerhaltung zu zeigen, dass für die Geschwindigkeit des zweiten Schlittens nach dem Stoß $v'_2 = 3/2\ v_1$ gilt. Wie lässt sich m_2 nun schreiben?

d) Berechnen sie v'_1 und v'_2 nun mit den in der Formelsammlung angegeben Formeln indem sie $v_2 = 0$, $m_2 = m_1/3$ einsetzen. Stimmen die Aussagen überein?

Aufgabe 1) Lösung

a)

Formelsammlung s.S.4, Abs 3.8 Energie → $E_{Feder} = \frac{1}{2} D \cdot x^2$ wobei D die Federkonstante ist und x die Auslenkung, d.h. Dehnung bzw Stauchung der Feder darstellt.

Höhe des Berges bei x_1 kann aus der Skizze mit 7.5m abgelesen werden
Energieerhaltung:

$$E_{Feder} = E_{pot}$$
$$\rightarrow \quad \tfrac{1}{2} D x^2 = mgh$$

Umstellen und Werte einsetzen

$$x = \pm\sqrt{\frac{2mgh}{D}} = \pm\sqrt{\frac{2 \cdot 1kg \cdot 10\,\frac{m}{s^2} \cdot 7.5m}{600\,\frac{kg}{s^2}}} = \pm\sqrt{\frac{150m^2}{600}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}m$$

$$\underline{\underline{x = \pm 0.5m}}$$

b)

Formeln für die Tabelle: Höhe h ablesen

E_{ges} = const. = $\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} 1kg \cdot 15^2 \frac{m^2}{s^2} = 112.5Nm = 112.5J$

$E_{pot}(h)$ = mgh

$E_{kin}(h)$ = E_{ges} – $E_{pot}(h)$

v(h) = $\sqrt{\frac{2E_{kin}}{m}}$ oder Formel aus c) benutzen

somit folgt die Tabelle:

Position x	Höhe h [m]	$E_{ges.}$ [J]	E_{pot} [J]	E_{kin} [J]	v(x) [m/s]
X_0	0	112.5	0	112.5	15
X_1	7.5	112.5	75	37.5	8.7
X_2	0	112.5	0	112.5	15
X_3	2.5	112.5	25	87.5	13.2
X_4	5	112.5	50	62.5	11.2
X_5	10	112.5	100	12.5	5

Die maximale Höhe ist erreicht, wenn die gesamte Energie in Form von potentieller Energie vorliegt:

$$E_{ges} = E_{pot} = mgh_{\max} \Rightarrow h_{\max} = \frac{112.5J}{1kg \cdot 10\,m/s^2} = \underline{\underline{11.25m}}$$

c)

Energieerhaltung: $E_{ges} = E_{pot} + E_{kin} \quad \rightarrow \quad E_{kin} = E_{ges} - E_{pot}$

Die Gesamtenergie ist konstant und festgelegt durch den Punkte x_0 (h=0, v=v_0) dort liegt nur kin. Energie vor, die potentielle Energie ist Null (mgh=mg*0=0). D.h. $E_{ges} = \frac{1}{2} m v_0^2$

Einsetzen:

$$E_{kin} = E_{ges} - E_{pot}$$
$$\tfrac{1}{2} m v(h)^2 = \tfrac{1}{2} m v_0^2 - mgh \quad |\cdot \tfrac{2}{m}$$
$$v(h)^2 = v_0^2 - 2gh$$
$$v(h) = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \quad q.e.d.$$

Aufgabe 2) Lösung

a)

Zeigen durch einsetzen

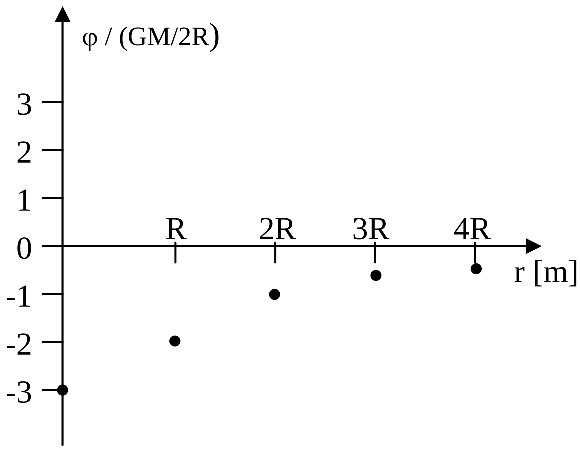
$$\varphi_i(r=R)=\frac{GM}{2R}\left(\frac{R^2}{R^2}-3\right)=\frac{GM}{2R}\cdot(1-3)=\frac{GM}{2R}\cdot(-2)=-\frac{GM}{R}$$

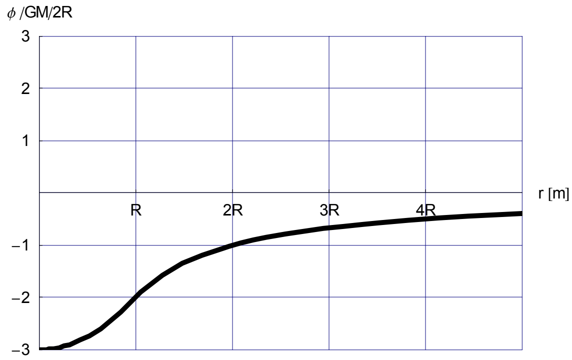
$$\varphi_a(r=R)=-\frac{GM}{R}=\varphi_i(r=R)\quad qed$$

b)

grundlegende Eigenschaften: $\varphi_i(r)$: neg. (r<R → r²/R² < 1 → (…) < 0), quad. Funktion
$\varphi_a(r)$: ~ 1/r und negative

Abstand r	0	R	2R	3R	4R
Pot. $\varphi(r)$	-3(GM/2R)	-2(GM/2R)	-1 (GM/2R)	-2/3 (GM/2R)	-1/2 (GM/2R)





c)

Kraftdefinition (siehe FS 3.2): in 3 Dimensionen $\vec{F}=-m\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\xrightarrow{\text{1dim}}\vec{F}=-m\frac{\partial}{\partial x}\varphi(\vec{r})$

Somit folgt:

$$F_i(r)=-m\frac{\partial}{\partial r}\varphi_i(\vec{r})=-m\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{GM}{2R}\left(\frac{\vec{r}^2}{R^2}-3\right)\right)=-m\frac{GM\,\vec{r}}{R^3}\qquad \text{für } r<R=\text{Erdradius}$$

$$F_a(r)=-m\frac{\partial}{\partial r}\varphi_a(r)=-m\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{GM}{r}\right)=-m\frac{GM}{r^2}\qquad \text{für } r\geq R$$

d)

Für die Betrachtungen spielt nur $F_i(r)$ eine Rolle:

r = R	die Masse wird zum Erdmittelpunkt beschleunigt
r = R/2	die Masse wird immer noch zum Erdmittelpunkt beschleunigt, allerdings nur noch halb so stark
r = 0	am Erdmittelpunkt wird F_i gleich Null, d.h. die Masse bewegt sich aufgrund der Trägheit weiter ohne beschleunigt zu werden
r = -R/2	die Masse wird negative – in Bezug auf die Bewegungsrichtung – beschleunigt, d.h. sie wird abgebremst
r = R	die Masse kommt zum Stillstand und wird anschließend erneut zum Erdmittelpunkt beschleunigt

Aufgabe 3) Lösung

Geg.: S_1: Masse m_1, Geschwindigkeit vor Stoß v_1, Geschwindigkeit nach Stoß $v'_1 = 1/2\ v_1$
S_2: Geschwindigkeit vor dem Stoß $v_2 = 0$

a)

Beim elastischen Stoß bleibt die Summe der kinetischen Energien der Stoßpartner konstant:
$E_{kin,\ ges} = \text{const.}$
Beim inelastischen Stoß wird ein Teil der kinetischen Energien der Stoßpartner in Wärme- und Deformationsenergie umgewandelt: $E_{kin,\ ges} \neq \text{const.}$

b)

Impulserhaltung:

$$\vec{P}_{vorher} = \vec{P}_{nachher}$$

$$m_1 v_1 + \underbrace{m_2 v_2}_{=0} = m_1 \underbrace{v_1'}_{\frac{1}{2}v_1} + m_2 v_2'$$

$$m_1 v_1 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1 + m_2 v_2' \quad \left| -\tfrac{1}{2} m_1 v_1 \quad \right| : v_2'$$

$$\frac{m_1 v_1}{2 v_2'} = m_2 \quad qed$$

c)

Energieerhaltung:

$$E_{kin,\,vorher} = E_{kin,\,nachher}$$

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \underbrace{\tfrac{1}{2} m_2 v_2^2}_{0} = \tfrac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad | \cdot 2$$

$$m_1 v_1^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \quad | \; v_1'^2 = (\tfrac{1}{2} v_1)^2 = \tfrac{1}{4} v_1^2 \text{ und } m_2 = \frac{m_1 v_1}{2 v_2'} \text{ einsetzen}$$

$$m_1 v_1^2 = \tfrac{1}{4} m_1 v_1^2 + \frac{m_1 v_1}{2 v_2'} v_2'^2 \quad | -\tfrac{1}{4} m_1 v_1^2 \text{ und kürzen}$$

$$\tfrac{3}{4} m_1 v_1^2 = \frac{m_1 v_1}{2} v_2' \quad |: m_1 v_1$$

$$\tfrac{3}{4} v_1 = \tfrac{1}{2} v_2' \quad | \cdot 2$$

$$\tfrac{3}{2} v_1 = v_2' \quad qed$$

$$\rightarrow \quad m_2 = \frac{m_1 v_1}{2 v_2'} = \frac{m_1 v_1}{2 \frac{3}{2} v_1} = \frac{m_1}{3}$$

d)

FS 3.4. →

$$v_1' = \frac{\overbrace{2 m_2 v_2}^{=0} + m_1 v_1 - m_2 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1 - \frac{m_1}{3} v_1}{m_1 + \frac{m_1}{3}} = \frac{\frac{2}{3} m_1 v_1}{\frac{4}{3} m_1} = \frac{v_1}{2} \quad \text{wahre Aussage}$$

$$v_2' = \frac{2 m_1 v_1 \overbrace{+ m_2 v_2 - m_1 v_2}^{=0}}{m_1 + m_2} = \frac{2 m_1 v_1}{m_1 + \frac{m_1}{3}} = \frac{2 m_1 v_1}{\frac{4}{3} m_1} = \frac{3}{2} v_1 \quad \text{wahre Aussage}$$

Die Aussagen stimmen überein.