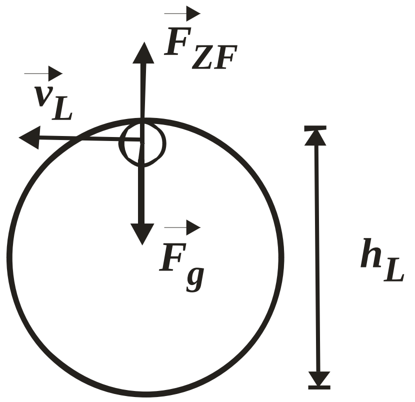
6. Übungsblatt – Physik I für Biologen / Chemiker HU Berlin, SS2011

Musterlösung

1. Aufgabe

a) Kräfte auf Kugel im Scheitel mit Nebenbedingung $v_L > 0\frac{m}{s}$



Zentripetalkraft (Gewichtskraft) und Zentrifugalkraft müssen im Gleichgewicht sein, damit die Kugel nicht herunterfällt:

$$\left|\vec{F}_{ZF}\right| = \left|\vec{F}_g\right|$$

$$m \cdot r \cdot \omega_L^2 = m \cdot g$$

$$r \cdot \frac{v_L^2}{r^2} = g$$

$$v_L^2 = g \cdot r$$

$$v_L = \sqrt{g \cdot r}$$

$$v_L = \sqrt{g \cdot h_L/2}$$

b) Es gilt Energieerhaltung:

$$E_{ges} = const$$

Energie am Startpunkt:

$$E_1 = E_{kin1} + E_{pot1}$$
$$= 0 + m \cdot g \cdot h_0$$

Energie im Scheitel des Loopings:

$$
\begin{aligned}
E_2 &= E_{kin2} + E_{pot2} \\
&= \frac{1}{2} m \cdot v_L^2 + m \cdot g \cdot h_L \\
&= \frac{1}{2} m \cdot g \cdot \frac{h_L}{2} + m \cdot g \cdot h_L \\
&= \frac{5}{4} m \cdot g \cdot h_L
\end{aligned}
$$

Somit folgt:

$$
\begin{aligned}
E_1 &= E_2 \\
m \cdot g \cdot h_0 &= \frac{5}{4} m \cdot g \cdot h_L \\
h_0 &= \frac{5}{4} h_L
\end{aligned}
$$

c) Es gilt Energieerhaltung:

$$E_{ges} = const$$

Energie am Startpunkt:

$$
\begin{aligned}
E_1 &= E_{kin1} + E_{pot1} \\
&= 0 + m \cdot g \cdot h_0
\end{aligned}
$$

Energie im Scheitel des Loopings:

$$
\begin{aligned}
E_2 &= E_{kin2} + E_{pot2} \\
&= \frac{1}{2} m \cdot v_L^2 + \frac{1}{2} I \cdot \omega_L^2 + m \cdot g \cdot h_L \\
&= \frac{1}{2} m \cdot g \cdot \frac{h_L}{2} + \frac{1}{2}\frac{2}{5} m \cdot r^2 \cdot \frac{v_L^2}{r^2} + m \cdot g \cdot h_L \\
&= \frac{1}{2} m \cdot g \cdot \frac{h_L}{2} + \frac{1}{5} m \cdot g \frac{h_L}{2} + m \cdot g \cdot h_L \\
&= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{10} + 1 \right) m \cdot g \cdot h_L \\
&= \frac{27}{20} m \cdot g \cdot h_L
\end{aligned}
$$

Somit folgt:

$$
\begin{aligned}
E_1 &= E_2 \\
m \cdot g \cdot h_0 &= \frac{27}{20} m \cdot g \cdot h_L \\
h_0 &= \frac{27}{20} h_L
\end{aligned}
$$

d) $h_L = 0{,}8m$; $\quad g = 10 \, m/s^2$

Gleitende Kugel:

$$
\begin{aligned}
E_{ges} &= const \\
E_1 &= E_{kin1} + E_{pot1} \\
E_1 &= m \cdot g \cdot h_0 \\
&= m \cdot g \cdot \frac{5}{4} h_L \\
E_2 &= E_{kin2} + E_{pot2} \\
&= \frac{1}{2} m \cdot v_{End}^2 \\
E_2 &= E_1 \\
\frac{1}{2} m \cdot v_{End}^2 &= m \cdot g \cdot \frac{5}{4} h_L \\
v_{End} &= \sqrt{\frac{5}{2} g \cdot h_L} \\
&= \sqrt{20 \frac{m^2}{s^2}} \approx 4{,}47 \frac{m}{s}
\end{aligned}
$$

Rollende Kugel:

$$
\begin{aligned}
E_{ges} &= const \\
E_1 &= E_{kin1} + E_{pot1} \\
E_1 &= m \cdot g \cdot h_0 \\
&= m \cdot g \cdot \frac{27}{20} h_L \\
E_2 &= E_{kin2} + E_{pot2} \\
&= \frac{1}{2} m \cdot v_{End}^2 + \frac{1}{2} I \cdot \omega_{End}^2 \\
&= \frac{1}{2} m \cdot v_{End}^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5} m \cdot r^2 \cdot \frac{v_{End}^2}{r^2} \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) m \cdot v_{End}^2 \\
&= \frac{7}{10} m \cdot v_{End}^2 \\
E_2 &= E_1 \\
\frac{7}{10} m \cdot v_{End}^2 &= m \cdot g \cdot \frac{27}{20} h_L \\
v_{End} &= \sqrt{\frac{27}{14} g \cdot h_L} \\
&= \sqrt{\frac{108}{7} \frac{m^2}{s^2}} \approx \sqrt{15{,}43 \frac{m^2}{s^2}} \approx 3{,}93 \frac{m}{s}
\end{aligned}
$$

2. Aufgabe

$\omega_1 = 0{,}5 Hz$

a) Es gilt Drehimpulserhaltung: $L_1 = L_2$

mit:

$$L_1 = I_1 \cdot \omega_1$$
$$L_2 = I_2 \cdot \omega_2$$

und

$$I_1 = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2$$
$$I_2 = m_1 \cdot \left(\frac{r_1}{2}\right)^2 + m_2 \cdot \left(\frac{r_2}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}\left(m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2\right)$$
$$= \frac{1}{4} I_1$$

folgt

$$L_1 = L_2$$
$$I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2$$
$$I_1 \cdot \omega_1 = \frac{1}{4} I_1 \omega_2$$
$$\omega_1 = \frac{1}{4} \omega_2$$

also ist $\omega_2 = 4 \cdot \omega_1 = 4 \cdot 0{,}5 Hz = 2 Hz$

b)

$$\frac{E_{kin1}}{E_{kin2}} = \frac{\frac{1}{2} I_1 \cdot \omega_1^2}{\frac{1}{2} I_2 \cdot \omega_2^2} = \frac{I_1 \cdot \omega_1^2}{\frac{1}{4} I_1 \cdot (4 \cdot \omega_1)^2} = \frac{1}{4}$$

c) Beim Heranziehen der Gewichte muss das Kind Arbeit gegen die Fliehkräfte verrichten. Diese Arbeit wird als zusätzliche kinetische Energie im System gespeichert.

3. Aufgabe

$m_z = 3kg; \quad m_K = 1kg; \quad R = 0{,}5m; \quad \omega = 10Hz$

a) Aus $\omega = \frac{2\pi}{T}$ folgt $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10Hz} \approx 0{,}63s$

b)

$$I_z = \frac{m_Z}{2} R^2 = \frac{3kg}{2}(0{,}5m)^2 = 0{,}375\, kg \cdot m^2$$

$$I_K = \frac{2}{5} m_K \cdot R^2 = \frac{2}{5} 1kg \cdot (0{,}5m)^2 = 0{,}1\, kg \cdot m^2$$

$$L_Z = I_Z \cdot \omega = 3{,}75\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}$$

$$L_K = I_K \cdot \omega = 1\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}$$

c)

$$\frac{E_{rot_Z}}{E_{rot_K}} = \frac{\frac{1}{2} I_Z \cdot \omega^2}{\frac{1}{2} I_K \cdot \omega^2} = \frac{I_Z}{I_K} = 3{,}75$$

d) Unter Verwendung vom Satz von Steiner findet man jeweils für eine um 0,5m parallel zur Symmetrieachse verschobene Rotationsachse folgende Trägheitsmomente:

$$I'_z = m_Z \cdot (0{,}5m)^2 + I_Z = 3kg \cdot (0{,}5m)^2 + 0{,}375\, kg \cdot m^2$$
$$= 1{,}125\, kg \cdot m^2$$

$$I'_K = m_K \cdot (0{,}5m)^2 + I_K = 1kg \cdot (0{,}5m)^2 + 0{,}1\, kg \cdot m^2$$
$$= 0{,}35\, kg \cdot m^2$$

4. Aufgabe

$$V_E = 0{,}2m^3; \quad \rho_E = 0{,}48\frac{kg}{l} = 480\frac{kg}{m^3}; \quad s_E = 0{,}3m; \quad s_G = 1{,}5m$$

a) Sie macht sich das Hebelgesetz zu Nutze!

b) Gesucht ist die Kraft zum Halten (entspricht einer statischen Situation, deshalb kann mit Schwerpunkten und Massenpunkten gerechnet werden).

Aufgrund der Hebelwirkung der Schubkarre ist nur der senkrecht zum Hebel wirkende Anteil der Gewichtskraft der Erde relevant:

$$F'_{g,E} = F_{g;E} \cdot \cos\alpha = m_E \cdot g \cdot \cos\alpha = V_E \cdot \rho_E \cdot g \cdot \cos\alpha$$

Mit dem Heblegesetz folgt für die von der Gärtnerin zum Halten benötigte Kraft *F*:

$$F \cdot s_G = F'_{g,E} \cdot s_E$$

$$F = \frac{s_E}{s_G} F'_{g,E} = \frac{s_E}{s_G} V_E \cdot \rho_E \cdot g \cdot \cos\alpha$$

c) $\alpha = 0°, 5°, 15°, 30°$ $\qquad g = 10 \, m/s^2$

Mit $F = \frac{s_E}{s_G} V_E \cdot \rho_E \cdot g \cdot \cos\alpha = \frac{0{,}3m}{1{,}5m} 0{,}2m^3 \cdot 480\frac{kg}{m^3} \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot \cos\alpha = 192N \cdot \cos\alpha$

folgt für

$$\alpha = 0° \Rightarrow F = 192N$$
$$\alpha = 5° \Rightarrow F \approx 191{,}27N$$
$$\alpha = 15° \Rightarrow F \approx 185{,}46N$$
$$\alpha = 30° \Rightarrow F \approx 166{,}28N$$

d) Die maximale Kraft $F_{\max}$ ist gleich der Kraft, die die Gärtnerin gerade beim Anheben der Schubkarre, also bei $\alpha = 0°$, aufbringen muss. Somit ist $F_{\max} = 192N$. Dies entspricht $\frac{F_{\max}}{F_{g,E}} \cdot 100\% = \frac{192N}{96kg \cdot 10\, m/s^2} \cdot 100\% = 20\%$ der eigentlichen Gewichtskraft der Erde in der Schubkarre. Würde man eine Kraft von 192N zum senkrechten Anheben eines Eimers Erde benötigen, so würde man eine Masse von $F_{\max} = m \cdot g \Leftrightarrow m = F_{\max}/g = 19{,}2kg$ heben. Die Gärtnerin müsste also $\frac{96kg}{19{,}2kg} = 5$ mal laufen.