Aufgabe 1

a) Taylorentwicklung:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

$$\underset{x_0=0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)(x)^2$$

somit folgt:

$$\Phi(x(t)) \approx \Phi(0) + \Phi'(0)x(t) + \frac{1}{2}\Phi''(0)x(t)^2$$

1) $\Phi(0) = mgl\left(1 - \cos\left(0/l\right)\right) = mgl(1-1) = 0$

2) $\Phi'(x(t)) = mgl\left(1 - \cos\left(x(t)/l\right)\right)' = mgl\left(\frac{1}{l}\sin\left(x(t)/l\right)\right) \rightarrow \Phi'(0)x(t) = mg \cdot \sin\left(x(t)/l\right) \cdot x(t) = 0$

3) $\Phi''(x(t)) = \left(\Phi'(x(t))\right)' = \left(-mg \cdot \sin\left(x(t)/l\right)\right)' = \frac{mg}{l} \cdot \cos\left(x(t)/l\right) \rightarrow \frac{1}{2}\Phi''(0)x(t)^2 = \frac{mg}{2l}x(t)^2$

$$\rightarrow \quad \Phi(x(t)) \approx \frac{mg}{2l}x(t)^2$$

b) Energieerhaltung, d.h. Gesamtenergie des Systems ist über pot. Energie am Punkt $x=x_{max}$ festgelegt.

$$E_{ges} = \frac{mg}{2l}x_{\max}^2 = \frac{mg}{2l}x(t)^2 + \frac{1}{2}mv^2(x(t)) \quad \Big| * \frac{2}{m}$$

$$\rightarrow \frac{g}{l}x_{\max}^2 = \frac{g}{l}x(t)^2 + v^2(x(t)) \quad \Big| - \frac{g}{l}x^2$$

$$\rightarrow \frac{g}{l}\left(x_{\max}^2 - x(t)^2\right) = v^2(x(t))$$

$$\rightarrow v(x(t)) = \pm\sqrt{\frac{g}{l}\left(x_{\max}^2 - x(t)^2\right)}$$

c) Aus Formelsammlung :

$$F = -\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x(t))$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\frac{mg}{2l}x(t)^2$$

$$= -\frac{mg}{l}x(t)$$

Differentialgleichung:

$$F = m\ddot{x}(t) = -\frac{mg}{l}x(t)$$

$$\rightarrow \ddot{x}(t) + \frac{g}{l}x(t) = 0$$

Aufgabe 2

a) $m\ddot{x}(t)+kx(t)=0$ mit $x(t)=A\sin(\omega t)$

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x}(t)+kx(t) &= m(A\sin(\omega t))''+kA\sin(\omega t)\\
&= m(A\omega\cos(\omega t))'+kA\sin(\omega t)\\
&= m(-A\omega^2\sin(\omega t))+kA\sin(\omega t) \quad \Big| : A\sin(\omega t)\\
&= -m\omega^2+k=0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{k=m\omega^2}}
\end{aligned}
$$

b) Ausgangsdifferentialgleichung: $\ddot{x}(t)+\omega^2 x(t)=0$

i) $x(t)=t^2+A\cos(\omega t) \quad \to \quad \ddot{x}(t)=2-A\omega^2\cos(\omega t)$

$$
\begin{aligned}
\to \quad \ddot{x}(t)+\omega^2 x(t) &= \left(2-A\omega^2\cos(\omega t)\right)+\omega^2\left(t^2+A\cos(\omega t)\right)\\
&= 2-A\omega^2\cos(\omega t)+\omega^2 t^2+A\omega^2\cos(\omega t)\\
&= 2+\omega^2 t^2\\
&\neq 0
\end{aligned}
$$

$\to$ erfüllt die DGL. Nicht

ii) $x(t)=A\sin(\omega t+\varphi_0) \quad \to \quad \ddot{x}(t)=-A\omega^2\sin(\omega t+\varphi_0)$

$$
\to \quad \ddot{x}(t)+\omega^2 x(t) = -A\omega^2\sin(\omega t+\varphi_0)+\omega^2 A\sin(\omega t+\varphi_0)
$$

$$\underline{\underline{=0}}$$

$\to$ erfüllt die DGL.

iii) $x(t)=A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t) \quad \to \quad \ddot{x}(t)=-\omega^2\left(A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)\right)$

$$
\to \quad \ddot{x}(t)+\omega^2 x(t) = -\omega^2\left(A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)\right)+\omega^2\left(A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)\right)
$$

$$\underline{\underline{=0}}$$

$\to$ erfüllt die DGL.

iv) $x(t)=Ae^{i(\omega t+\varphi_0)} \quad \to \quad \ddot{x}(t)=-A\omega^2 e^{i(\omega t+\varphi_0)}$

$$
\to \quad \ddot{x}(t)+\omega^2 x(t) = -A\omega^2 e^{i(\omega t+\varphi_0)}+\omega^2 Ae^{i(\omega t+\varphi_0)} \quad \underline{\underline{=0}}
$$

$\to$ erfüllt die DGL.

Aufgabe 3

Aus dem Plot liest man ab: A = 0.5 cm, T = 100ms → f = 1/T = 10 Hz

Federkonstante D:
aus Formelsammlung (s.S.5 oben)

$$\omega = \sqrt{D/m} \rightarrow \quad D = \omega^2 m$$
$$= (2\pi f)^2 m$$
$$= 4\pi^2 100 Hz^2 1kg$$
$$\approx 3950\, N/m$$

max. Geschwindigkeit:

$$x(t) = -A \cdot \cos(\omega t) \quad \rightarrow \quad |v(t)| = \left| -A\omega \cdot \underbrace{\sin(\omega t)}_{\max=1} \right| \quad \rightarrow \quad v_{\max} = A\omega = A \cdot 2\pi f = 0.5cm \cdot 2\pi \cdot 10Hz = 0.31 \frac{m}{s}$$

Gesamtenergie:
Alternative 1 über v_{max}

$$E_{ges} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = 0.5kg \cdot (0.31 m/s)^2 \approx 0.5kg \cdot 0.1 \frac{m^2}{s^2} = 0.05\, Joule$$

Alternative 2 über Auslenkung A und Federkonstante D

$$E_{ges} = \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2} 3950 \frac{N}{m} (0.005m)^2 \approx 2000 \cdot 0.000025 Nm = 0.05\, Joule$$

Aufgabe 4

a) Fallunterscheidung $\gamma < \omega$ Schwach gedämpfte Schwingung
$\gamma = \omega$ Aperiodischer Grenzfall
$\gamma > \omega$ Kriechfall

b) Aus der Formel liest man ab: $\gamma = 0.2\ s^{-1}$ und $\omega = 1\ s^{-1}$ → $\gamma < \omega$
→ Schwach gedämpft

c) ω = 1 → T = 2π/ω = 6.3s

Wertetabelle

t [s]	t/T	Exp[-0.2 t]	z[t]
0	0.0	1.0	1.0
1	0.2	0.8	0.4
2	0.3	0.7	-0.3
3	0.5	0.5	-0.5
4	0.6	0.4	-0.3
5	0.8	0.4	0.1
6	1.0	0.3	0.3
7	1.1	0.2	0.2
8	1.3	0.2	0.0
9	1.4	0.2	-0.2
10	1.6	0.1	-0.1

Plot