1. Aufgabe **(4 Punkte: 2 für a), 2 für b))**

Die Schwingungsfrequenz der Federn eines Autos betrage 1,4 Hz, die Wagenmasse inklusive Fahrer beträgt 850 kg. Die Stoßdämpfer des Autos sind leider kaputt und dämpfen das System nicht mehr!

a) Wie groß ist die Federkonstante des beteiligten Federungssystems?

Ansatz: $\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{D}{m}}$

Auflösen nach: $D = 4\pi^2 m f^2$

Einsetzen: $D = 4\pi^2 * 850 * 1{,}4^2 * kg/s^2 = 65771 * kg/s^2$

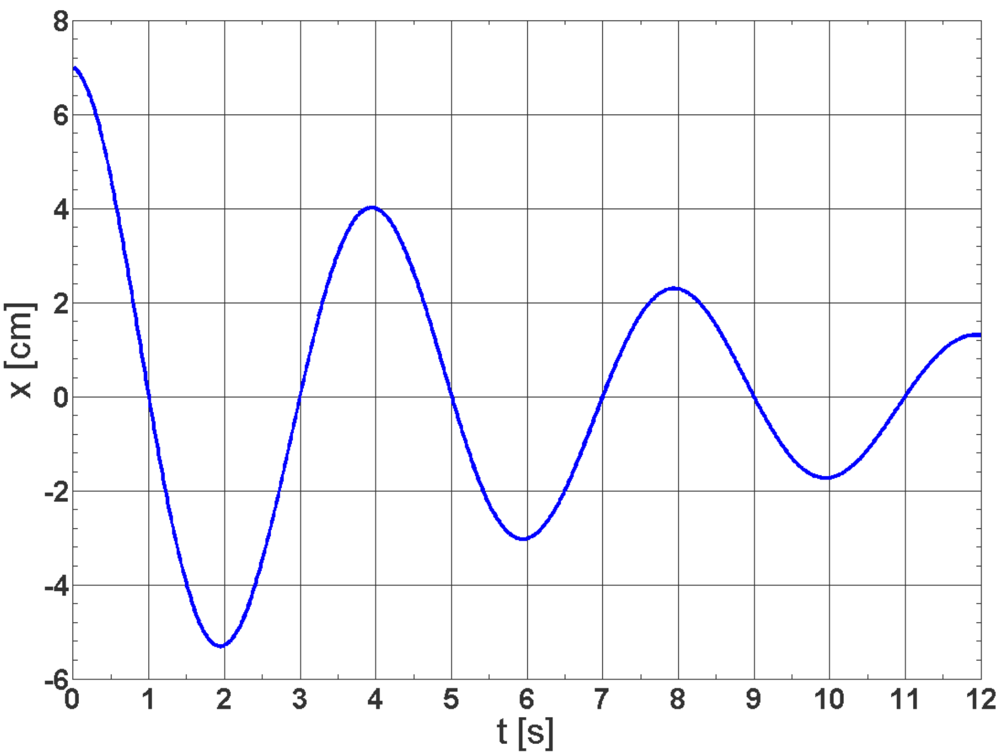
b) Das Auto fährt über eine Straße mit periodischen Querwellen im Abstand von 20 m.
Bei welcher Geschwindigkeit gerät das Auto in Resonanzschwingungen?

Ansatz: $v = \lambda f$

Einsetzen: *v=20*1,4*m/s=28*m/s*

2. Aufgabe **(6 Punkte – je 2 für a),b) und c))**

Eine eindimensionale gedämpfte harmonische Schwingung sei beschrieben durch die zeitabhängige Auslenkung des Schwingers $x(t) = e^{-\gamma t} \cdot A \cdot \cos(\omega t)$.



a) Bestimmen Sie aus dem Graphen (siehe Rückseite) die Größen A und ω und schätzen Sie einen Wert für γ ab, indem Sie z.B. die Amplitude nach einer Schwingung mit der Anfangsamplitude vergleichen.

Gegeben:: $A = 7cm;\ T = 4s;\ x(T) = 4cm;$

Ansatz: $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{s}$

$$x(T) = Ae^{-\gamma T} \Leftrightarrow e^{-\gamma T} = \frac{x(T)}{A};$$

Umformen und Einsetzen:

$$\gamma = -\ln\left(\frac{x(T)}{A}\right)/T = -\ln\left(\frac{4cm}{7cm}\right)/4s = 0{,}14s$$

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Schwingers zur Zeit t = 7,5 s

Ansatz: *Geschwindigkeit ist Ableitung vom X nach t*

$$v(t) = \dot{x}(t)$$
$$v(t) = -Ae^{-\gamma t}(\gamma\cos(wt) + \omega\sin(\omega t))$$

Einsetzen: $v(7{,}5s) = -7cm * e^{-0{,}14s7{,}5s}(0{,}14s*\cos(\frac{\pi}{2s}7{,}5s) + \frac{\pi}{2s}\sin(\frac{\pi}{2s}7{,}5s))$

$$v(7{,}5s) = 2{,}48\frac{cm}{s}$$

c) Um welchen Dämpfungsfall handelt es sich hier? Wie groß müsste die Dämpfungskonstante γ sein, damit man den aperiodischen Grenzfall beobachten kann (Nehmen sie näherungsweise $\omega = \omega_0$ an)? Beschreiben Sie die Bewegung des Schwingers, die im aperiodischen Grenzfall ausgeführt wird. Wie sieht diese bei noch größerer Dämpfung aus?

Es handelt sich um schwache Dämpfung. Um den aperiodischen Grenzfall beobachten zu können, müsste $\omega_0 = 1{,}57\frac{1}{s}$ *sein.*

Beim aperiodischen Grenzfall schwingt der Schwinger gerade nicht mehr über die Ruhelage hinaus, sondern kehrt direkt zur Ruhelage zurück. Im Kriechfall bei noch höherer Dämpfung kehrt der Schwinger ebenfalls ohne zu Schwingen direkt in die Ruhelage zurück, allerdings langsamer als beim aperiodischen Grenzfall.

3. Aufgabe **(4 Punkte – je 2 für a) und b))**

Eine schwingende Masse von 1,8 kg an einer Feder mit der Federkonstanten 720 N/m verliert bei jeder vollen Schwingung 4% ihrer Energie.

a) In der Vorlesung wurde der Gütefaktor Q und der Zusammenhang mit der Dämpfungskonstanten eingeführt. Der Q-Faktor lässt sich aber auch direkt über die Verluste eines schwingfähigen Systems berechnen: $Q = 2\pi / \left|\Delta E / E\right|_{Periode}$. Q ist also umgekehrt proportional zu den relativen Energieverlusten während einer Periode. Berechnen sie den Gütefaktor des Systems und darüber die Halbwertsbreite der Resonanz.

Ansatz für Q: $$Q = \frac{2\pi}{\left|\Delta E / E\right|_{Periode}} = \frac{2\pi}{0{,}04} = 157$$

Ansatz Halbwertsbreite: $$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx \frac{\sqrt{3}}{Q} \Rightarrow \Delta\omega = \sqrt{3}\frac{\omega_0}{Q} \; und \; \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = 20\frac{1}{s}$$

Einsetzen: $$\Delta\omega = 0{,}22\frac{1}{s}$$

b) Nun wird das System durch eine sinusförmige Kraft mit einem Maximalwert von $F_0 = 0{,}5$ N angetrieben. Wie groß ist die Resonanzamplitude (Frequenz der treibenden Kraft ist gleich der Resonanzfrequenz)?

Ansatz: $$\frac{X_0}{X_0^*} = \frac{\omega_0{}^2}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

Verwende: $$\omega = \omega_0 \Rightarrow \frac{X_0}{X_0^*} = \frac{\omega_0{}^2}{2\gamma\omega_0} = Q$$

Auflösen nach X_0: $$X_0 = X_0^* Q = \frac{F_0}{D} Q$$

Einsetzen: $$X_0 = 10{,}9 cm$$

4. Aufgabe **(6 Punkte – je 2 für a),b) und c))**

Ein schwach gedämpfter harmonischer Oszillator wird durch einen äußeren Erreger angetrieben.

a) Wie ist der Phasenunterschied zwischen Erregerschwingung und Oszillatorschwingung bei einer quasistatischen Anregung, im Resonanzfall und der schnellen Anregung?

bei quasistatischer Anregung: $\phi = 0$

im Resonanzfall: $\phi = \frac{\pi}{2}$

bei schneller Anregung: $\phi = \pi$

b) Was beschreibt der Phasengang? Beschreiben Sie qualitativ den Unterschied in Phase und Amplitude beim Übergang von stärkerer zu schwächerer Dämpfung.

Der Phasengang beschreibt die relative Phase zwischen Erreger und Oszillator, d.h. die Differenz von Erreger und Oszillatorfrequenz.

Mit ansteigender Dämpfung wird der Phasenunterschied zwischen Erreger und Oszillator größer und die Oszillatoramplitude kleiner.

c) Erläutern Sie qualitativ was bei einem dämpfungsfreien harmonischen Oszillator passiert, der bei seiner Resonanzfrequenz angeregt wird und benennen Sie ein reales Beispiel für diesen Effekt.

Haben der äußere Erreger und der Oszillator dieselbe Frequenz, dann wird mehr und mehr Energie im System deponiert. Wenn diese Energie nicht durch Dämpfen der Schwingung aus dem System abgeführt werden kann, steigt die Schwingungsamplitude so lange an, bis es zur Zerstörung des Systems kommt. Man spricht von Resonanzkatastrophe.

Beispiele: Zersingen von Weingläsern, Einstürzende Brücke durch im Gleichschritt über sie marschierende Soldaten, Einstürzen der Tacoma-Narrows-Bridge in Washingtion durch Windanregung.