1 Messung

1.1 physikalische Größen und Einheiten

Basisgrößen mit SI-Einheiten

Größe	SI-Einheit	Abkürzung
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Zeit	Sekunden	s
elektrische Stromstärke	Ampere	A
Temperatur	Kelvin	K
Stoffmenge	Mol	mol
Lichtstärke	Candela	cd

Die Einheiten der **abgeleiteten Größen** werden dort angegeben, wo diese eingeführt werden.

1.2 Messfehler

n - Anzahl Messungen & x_i - Ergebnis i-te Messung

Größe	Zeichen	Berechnung
Mittelwert	$\overline{x}$	$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
wahrer Wert	μ	durch Mittelwert abschätzbar
mittl. quadr. Fehler d. Einzelmessg.	s	$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$
Standardabweichung	σ	$\sigma \approx s$
Fehler des Mittelwerts	$\Delta\overline{x}$	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$

2 Mathematik

2.1 Differentiationsregeln

Produktregel: $f(x) = g(x) \cdot h(x) \quad \rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx} \cdot h(x) + g(x) \cdot \frac{dh}{dx}$

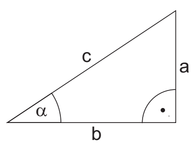
Kettenregel: $f(u) = g(u)$ mit $u = h(x) \rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{dg}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

2.2 Trigonometrische Funktionen

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \qquad \tan(\alpha) = -\tan(-\alpha)$$



2.3 Komplexe Zahlen

$$i^2 = -1 \qquad \sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

$$e^{i\cdot\alpha} = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha) \qquad \cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

2.4 Taylorentwicklung

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0) \cdot (x - x_0)^3 + \ldots$

2.5 Vektoren

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Betrag: $|\vec{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Addition: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$

Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = a \cdot b \cdot \cos\left(\angle(\vec{a},\vec{b})\right)$

Kreuz- bzw. Vektorprodukt: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$, $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = a \cdot b \cdot \sin\left(\angle(\vec{a},\vec{b})\right)$

Zeitableitung: $\dot{\vec{a}} = \frac{d\vec{a}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{a_1} \\ \dot{a_2} \\ \dot{a_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{da_1}{dt} \\ \frac{da_2}{dt} \\ \frac{da_3}{dt} \end{pmatrix}$

3 Mechanik

3.1 Bewegungslehre

Größe	Zeichen	Berechnung	SI-Einheit
Bahnkurve	$\vec{r}(t)$	$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$	m
Geschwindigkeit	$\vec{v}(t)$	$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$	m/s
Beschleunigung	$\vec{a}(t)$	$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$	m/s^2

Spezialfall	$\vec{a}(t)$	$\vec{v}(t)$	$\vec{r}(t)$
Gleichförmige Bewegung	0	$\vec{v_0} = \text{const.}$	$\vec{v_0} \cdot t + \vec{r_0}$
Gleichm. beschl. Bewegg.	$\vec{a_0} = \text{const.}$	$\vec{a_0} \cdot t + \vec{v_0}$	$\frac{\vec{a_0}}{2} \cdot t^2 + \vec{v_0} \cdot t + \vec{r_0}$

3.2 Kraft $\vec{F}$

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ (2. Newtonsches Axiom)	$\left[\vec{F}\right] = 1\,\text{N} = 1\,\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$ (Newton)

Alternative Definition über **potentielle Energie**: $\vec{F} = \vec{\nabla} E_{\text{pot}}(\vec{r})$ Alternative Definition über **Potential** (Gravitationspot.): $\vec{F} = -\vec{\nabla} \cdot \Phi(\vec{r})$ mit $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ & $\Phi(\vec{r})$ - stetiges Potential

Name	Berechnung	Bemerkung
Gewichtskraft	$\vec{F}_\text{G} = m \cdot \vec{g}$	Fallbeschleunigung $\vec{g}$
Federkraft (Hooksches Gesetz)	$\vec{F}_\text{F} = -k \cdot \vec{x}$	Federkonstante k, Auslenkung $\vec{x}$
Coulomb-Reibung	$F_\text{R} = \mu \cdot F_\text{N}$	Reibungszahl μ, Normalkraft F_N

3.3 Druck p

$p = \frac{\lvert\vec{F}_\perp\rvert}{A}$ mit $\vec{F}_\perp$ - Kraft senkrecht zu Fläche A	$[p] = 1\,\text{Pa} = 1\,\text{N/m}^2$ (Pascal)

3.4 Impuls $\vec{p}$

$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	$[\vec{p}] = 1\,\text{kg} \cdot \text{m/s}$

Verallgemeinerung des zweiten Newtonschen Axioms: $\vec{F}_\text{extern} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ mit $\vec{F}_\text{extern}$ - externe Kräfte

Schwerpunkt $\vec{r}_\text{S}$

n Massen m_i mit Koordinaten r_i: $\vec{r}_\text{S} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$.

zentraler elastischer Stoß

Körper 1 (m_1, v_1) und 2 (m_2, v_2) bewegen sich entlang der selben Geraden

Geschwindigkeiten nach Stoß: $v_1' = \frac{2 \cdot m_2 v_2 + m_1 v_1 - m_2 v_1}{m_1 + m_2}$ $\quad v_2' = \frac{2 \cdot m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_1 v_2}{m_1 + m_2}$

3.5 Arbeit W

$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{l}$ mit $\vec{F}$ Kraft auf Körper & Integral über Weg	$[W] = 1\,\text{J} = 1\,\text{N} \cdot \text{m}$ (Joule)

$\vec{F}$ = konstant & geradlinige Bewegung entlang $\vec{l}$: $W = \vec{F} \cdot \vec{l} = F \cdot l \cdot \cos\left(\angle(\vec{F},\vec{l})\right)$

3.6 Leistung P

$P(t) = \frac{dW(t)}{dt}$	$[P] = 1\,\text{W} = 1\,\text{J/s} = 1\,\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$ (Watt)

3.7 Drehbewegung

Größe	Berechnung	Bemerkung	Vgl. gradl. Bewegg.
Abstand von Drehachse	$\vec{r}$		
Winkel	φ	$[\varphi]$ = Bogenmaß	$\vec{r}$
Winkelgeschwindigkeit	$\vec{\omega}$, $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$	$\vec{\omega} \perp$ Drehebene, $[\vec{\omega}] = 1/\text{s}$	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$
Bahngeschwindigkeit	$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$		
Winkelbeschleunigung	$\dot{\vec{\omega}}$, $\dot{\omega} = \ddot{\varphi}$	Ableitg.: $\dot{b} = \frac{db}{dt}$ & $\ddot{b} = \frac{d^2b}{dt^2}$	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$
Drehmoment	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$	$\left[\vec{M}\right] = 1\,\text{Nm} = 1\,\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$	
Drehmoment	$\vec{M} = \dot{\vec{L}}$	Ableitg.: $\dot{b} = \frac{db}{dt}$	$\vec{F} = \dot{\vec{p}}$
Drehimpuls	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$		

Spezialfall: Kreisbewegung ($\vec{v} \perp \vec{r}$ und $|\vec{r}| = r = \mathrm{const.}$)
Gleichförmige Kreisbewegung ($|\vec{v}| = \mathrm{const.}$): $|\vec{a}_{\mathrm{radial}}| = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$ (Zentripetalbeschl.)
Ungleichförmige Kreisbewegung: $|\vec{a}_{\mathrm{tangential}}| = \frac{d\vec{v}}{dt} = r \cdot \frac{d\omega}{dt}$
einige Vereinfachungen:

Größe	Berechnung	Bemerkung
Radius	r	
Bogenlänge	$s = r \cdot \varphi$	
Bahngeschwindigkeit	$v = \omega \cdot r$	
Drehmoment	$\vec{M} = \Theta \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt}$	Trägheitsmoment Θ
Drehimpuls	$\vec{L} = \Theta \cdot \vec{\omega}$	

Trägheitsmoment

Körper	Berechnung	Bemerkung
Massepunkte	$\Theta = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \cdot m_i$	r_i Abstände von Drehachse
bel. Körper	$\Theta = \int_{\mathrm{Volumen}} r^2 \cdot dm$	
Vollzylinder	$\Theta = \frac{m}{2} \cdot R^2$	bzgl. Symmetrieachse, R Zylinderradius
Hohlzylinder	$\Theta = m \cdot R^2$	bzgl. Symmetrieachse, R Zylinderradius
Vollkugel	$\Theta = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2$	bzgl. Symmetrieachse, R Kugelradius
Hohlkugel	$\Theta = \frac{2}{3} \cdot m \cdot R^2$	bzgl. Symmetrieachse, R Kugelradius

Satz von Steiner $\Theta_{\mathrm{B}} = m \cdot a^2 + \Theta_{\mathrm{A}}$ mit A - Achse durch Schwerpunkt, B - Achse parallel zu A & a - Abstand von A zu B

3.8 Energie E

E (Definitionen in Tabelle)	$[E] = 1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = 1\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$ (Joule)

Bezeichnung	Berechnung	Bemerkung
kinetische Energie (Translation)	$E_{\mathrm{kin,T}} = \frac{m}{2} \cdot v^2$	
kinetische Energie (Rotation)	$E_{\mathrm{kin,R}} = \frac{\Theta}{2} \cdot \omega^2$	
potentielle Energie (im Gravitationsfeld)	$E_{\mathrm{pot}} = m \cdot g \cdot h$	Höhe h
in Feder gespeicherte Energie	$E_{\mathrm{Feder}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$	Dehnung/Stauchung x

4 Schwingungen und Wellen

4.1 Schwingungen

Harmonischer Oszillator

hinreichend oft stetig differenzierbares Potential: $\Phi(\tilde{x})$
Taylorentwicklg. (2.4) um x_0: $\Phi(\tilde{x}) \approx \underbrace{\Phi(x_0) + \Phi'(x_0) \cdot (\tilde{x} - x_0) + \frac{1}{2}\Phi''(x_0) \cdot (\tilde{x} - x_0)^2}_{\Phi(\tilde{x})_{\mathrm{harm}}} + \dots$

x_0 sei Minimalstelle von $\Phi(\tilde{x})$: $\Phi(\tilde{x})_{\text{harm}} = \Phi(x_0) + \frac{1}{2}\Phi''(x_0) \cdot (\tilde{x} - x_0)^2$
Kraft (3.2): $F(\tilde{x}) = -\frac{d\Phi(\tilde{x})_{\text{harm}}}{d\tilde{x}} = -\Phi''(x_0) \cdot (\tilde{x} - x_0)$
Analogie zur Federkraft: $\Phi''(x_0) = D$ entspricht einer Art Federkonstante

$\boxed{\text{Bewegungsgleichung: } \ddot{x}(t) + \frac{D}{m}x(t) = 0 \text{ mit } x(t) \text{ - Auslenkung aus Ruhelage}}$

Allgemeine Lösung: $x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$ bzw. $x(t) = C \cdot e^{\pm i(\omega_0 t + \varphi_0)}$
mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$ (Kreisfrequenz)

Gedämpfte Harmonische Schwingung

$\boxed{\text{Bewegungsgleichung: } \ddot{x}(t) + \frac{\kappa}{m}\dot{x}(t) + \frac{D}{m}x(t) = 0}$

Lösungsansatz $x(t) = C \cdot e^{\lambda \cdot t}$ liefert $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ mit $\gamma = \frac{\kappa}{2m}$ und $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$.
Unterscheidung von drei Fällen:
schwache Dämpfung ($\gamma < \omega_0$): $x(t) = C \cdot e^{-\gamma \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t)$ mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.
aperiodischer Grenzfall ($\gamma = \omega_0$): $x(t) = C \cdot (1 + \gamma \cdot t) \cdot e^{-\gamma \cdot t}$
Kriechfall ($\gamma > \omega_0$): $x(t) = C \cdot e^{\left(-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right) \cdot t}$

Getriebene, gedämpfte harmonische Schwingung

$\boxed{\text{Gleichung: } \ddot{x}(t) + \frac{\kappa}{m}\dot{x}(t) + \frac{D}{m}x(t) = \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega \cdot t) \text{ mit } F_0 \text{ - Amplitude treibende Kraft}}$

Nach Einschwingen: $x(t) = g(\omega) \cdot A_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - \Delta\varphi(\omega))$ mit $A_0 = \frac{F_0}{D}$. $g(\omega)$ ist der Amplitudengang und $\Delta\varphi(\omega)$ der Phasengang.

4.2 Wellen

Wellen in 1D (1D-Schwingung + 1D-Ausbreitung)

$\boxed{\text{Wellengleichung: } \frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x,t) - c^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}y(x,t) = 0}$

Lösung: z.B. Harmonische Wellen
Bsp.: $y(x,t) = A_s \cdot \sin(kx \pm \omega t)$, $y(x,t) = A_c \cdot \cos(kx \pm \omega t)$, bzw. $y(x,t) = A \cdot e^{i(kx \pm \omega t)}$
Dispersionsrelation: $w(k)^2 = c^2 k^2$ mit $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (Wellenzahl)

Wellen in 3D (3D-Schwingung + 3D-Ausbreitung)

$\boxed{\text{Wellengleichung: } \frac{\partial^2}{\partial t^2}y(\vec{r},t) - c^2 \cdot \Delta y(\vec{r},t) = 0 \text{ mit } \Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)}$

Lösungen: Ebene Wellen $y(\vec{r},t) = A_c \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)$
Kugelwellen $y(\vec{r},t) = y(r,t) = \frac{A}{r} \cdot \cos(k \cdot r \pm \omega t)$
Dispersionsrelation: $w(k)^2 = c^2|\vec{k}|^2$ mit $\vec{k}$ mit $|\vec{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (Wellenzahlvektor)

4.3 Dopplereffekt

f - Frequenz der Quelle, c - Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, v - Geschwindigkeit Quelle bzw. Beobachter, $\tilde{f}$ - vom Beobachter wahrgenommene Frequenz

bewegte Quelle, ruhender Beobachter	bewegter Beobachter, ruhende Quelle
auf Beobachter zu: $\tilde{f} = \frac{1}{1-\frac{v}{c}} \cdot f$	auf die Quelle zu: $\tilde{f} = \left(1 + \frac{v}{c}\right) \cdot f$
von Beobachter weg: $\tilde{f} = \frac{1}{1+\frac{v}{c}} \cdot f$	von der Quelle weg: $\tilde{f} = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \cdot f$

5 Flüssigkeiten und Gase

Dichte ρ

$\rho = \frac{m}{V}$ mit m - Masse & V - Volumen	$[\rho] = 1\,\mathrm{kg/m^3}$

Schweredruck p (innerhalb des Fluids)

$p = \rho \cdot h \cdot g$ mit h - Höhe Flüssigkeitssäule, ρ - Dichte & g - Fallbeschleunigung	siehe 3.3

Auftriebskraft F_A

$F_A = g \cdot V \cdot \rho_F$ mit V - verdrängtes Volumen der Flüssigkeit & ρ_F - Dichte Flüssigkeit

Resultierende Kraft F (nach Abzug der Gewichtskraft)

$F = g \cdot V \cdot (\rho_F - \rho_K)$ mit ρ_K - Dichte Körper

Strom

Größe	Zeichen	Berechnung	Einheit
Stromstärke	I	$I = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\text{transportiertes Volumen}}{\text{benötigte Zeit}}$	$\mathrm{m^3/s}$
Strömungswiderstand	R	$R = \frac{\Delta p}{I} = \frac{\text{Druckdifferenz}}{\text{Stromstärke}}$	$\mathrm{N \cdot s/m^5}$
Leitwert	S	$S = \frac{1}{R}$	$\mathrm{m^5/(N \cdot s)}$

Kontinuitätsbedingung (für stationäre Strömung durch Rohr)

$A_1 \cdot u_1 = A_2 \cdot u_2$ mit A_1 bzw. $A2$ - Rohrquerschnitt & u_1 bzw. u_2 - Fließgeschwindigkeit

Satz von Bernoulli (für stationäre Strömung in idealer Flüssigkeit)

p - Druck, ρ - Dichte, u - Fließgeschwindigkeit, g - Fallbeschleunigung & h - Höhe

$p + \frac{1}{2}\rho \cdot u^2 + \rho \cdot g \cdot h = \text{konstant}$

Hagen-Poiseuille'sches Gesetz (laminare Strömung durch Rohr)

$I = \frac{\pi}{8\eta}\left|\frac{\Delta p}{\Delta L}\right| r^4$ mit r - Rohrradius, η - dynamische Viskosität & $\frac{\Delta p}{\Delta L}$ - $\frac{\text{Druckänderung}}{\text{Länge}}$

Stokes'sche / viskose Reibungskraft F_S (Kugel in laminarer, stationärer Strömung)

$F_\mathrm{S} = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$ mit η - dynamische Viskosität, r - Kugelradius & v - Fließgeschwindigkeit

Turbulenter Strömungswiderstand F_t

$F_\mathrm{t} = \frac{1}{2} c_\mathrm{W} \cdot A \cdot \rho \cdot v^2$ mit c_W-Wert, A - Querschnittsfläche, ρ - Dichte & v - Geschwindigkeit

Reynoldszahl Re (Verhältnis turbulente Reibung / viskose Reibung)

$\mathrm{Re} = \frac{\rho}{\eta} \cdot v \cdot r$ mit ρ - Dichte, η - dyn. Viskosität, v - Geschwindigkeit & r - Kugelradius