

Institut für Physik Physikalisches Grundpraktikum

Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik (Teil 1)

**Grundsätzliche Anmerkungen zur Betrachtung und
Behandlung von Messunsicherheiten in Experimenten**

Zitate

In nichts zeigt sich der Mangel an mathematischer Ausbildung mehr als an einer übertrieben genauen Rechnung.

Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

Eine oft zu beobachtende „Todsünde“ beim Einsatz von Taschenrechnern und PC...

Wenn Sie für Ihr Experiment Statistiken brauchen, dann sollten Sie lieber ein besseres Experiment machen.

Lord Ernest Rutherford of Nelson (1871-1937)

Das gilt in der modernen Physik sicherlich so nicht mehr...

Zielsetzungen

Anspruch von wissenschaftlichem Experimentieren:

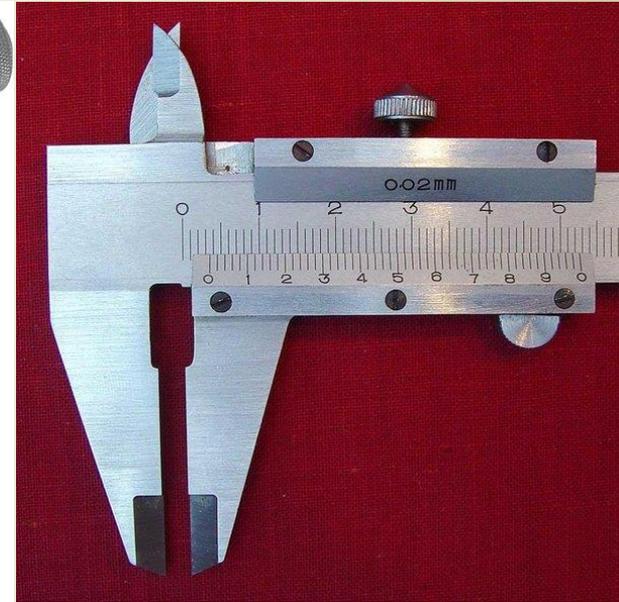
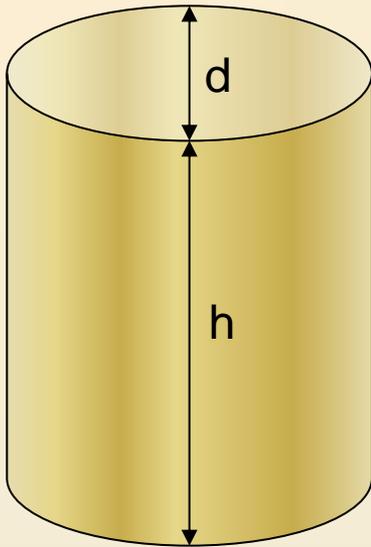
- adäquater (sachgerechter) und effizienter Gebrauch von Messtechnik und Arbeits-Techniken des **Messens** einschließlich der notwendigen **Auswertung**
- Fähigkeit der **kritischen Bewertung** eines Ergebnisses

Vergleich experimenteller Ergebnisse mit einem theoretischen Modell („Praxis als Kriterium der Wahrheit“):

Ist das theoretische Modell gültig oder nicht? Die Qualität und Aussagekraft der Messungen muss für den Vergleich bekannt sein!

Das trifft nicht nur für die Physik, sondern auch darüber hinaus in *jeder* ernsthaften (nicht nur experimentellen) Wissenschaft zu!

Einfaches Beispiel: Volumenmessung



Zylindervolumen: $V = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h$

Durchmesser: $d = (25,65 \pm 0,01) \text{ mm}$

Höhe: $h = (82,4 \pm 0,1) \text{ mm}$

Ergebnis: $V = (42578,644548207473283808232921516 \pm ?) \text{ mm}^3$

Probleme: **Signifikante** Stellenzahl? **Genauigkeit** bzw. **Unsicherheit** des Ergebnisses?

Grundsätzliche Überlegungen

Zylindervolumen: $V_{\max} = \frac{\pi}{4} \cdot d_{\max}^2 \cdot h_{\max}$ $V_{\min} = \frac{\pi}{4} \cdot d_{\min}^2 \cdot h_{\min}$

Durchmesser: $d_{\max} = 25,66 \text{ mm}$ $d_{\min} = 25,64 \text{ mm}$

Höhe: $h_{\max} = 82,5 \text{ mm}$ $h_{\min} = \underline{82,3} \text{ mm}$

Ergebnisse: $V_{\max} = 42663,564153828495587388807019148 \text{ mm}^3$

$V_{\min} = 42493,818467799748348372367856777 \text{ mm}^3$

$\Delta V = V_{\max} - V_{\min} = 169,74568602874723901643916237 \text{ mm}^3$

Das ist eine "sehr grobe Abschätzung nach oben", s. die übernächste Folie...

Problem: Welche wirklich signifikante Stellenzahl?

In nichts zeigt sich der Mangel an mathematischer Ausbildung mehr als an einer übertrieben genauen Rechnung (C.F. Gauß)

Einige Grundregeln (mathematisches Runden)

Multiplikation, Division, Radizieren:

Die signifikanten Stellen des Resultats sind durch die Zahl mit den wenigsten signifikanten Ziffern gegeben.

Addition, Subtraktion:

Das Endergebnis hat nach dem Komma so viele signifikante Stellen wie die Zahl mit den wenigsten signifikanten Stellen.

Achtung: Zu frühes Runden (bei Zwischenrechnungen) führt im Ergebnis zu anwachsenden Rundungsfehlern!

Hilft uns das hier weiter? Leider nicht wirklich...

Etliche offene Fragen bleiben...

Höhe und Durchmesser des Zylinders wurden mit verschiedenen Meßmitteln (d.h. auch mit unterschiedlicher Genauigkeit!) gemessen. Welche Folgen hat das für das Endergebnis? Ist die bisherige Betrachtung mit Hilfe der signifikanten Stellen wirklich ausreichend sachgerecht?

Der Durchmesser geht quadratisch in das Ergebnis ein; seine Unsicherheit hat also “größere“ Folgen für das Endergebnis und seine Unsicherheit. Wie ist das zu berücksichtigen?

Die Volumenbestimmung geht von der Annahme eines “idealen” Zylinders aus. In welcher Weise könnte eine mögliche Abweichung von der Rotationssymmetrie und ebenso der Boden- bzw. Deckfläche von der Planparallelität sowie die Oberflächenqualität wichtig sein und berücksichtigt werden?

Wie “zuverlässig” und “genau” sind die eingesetzten Messmittel wirklich? Sind die einzelnen Messergebnisse reproduzierbar? Welche Messbedingungen sind wichtig und zu beachten? Sind die Messmittel kalibriert oder haben sie evtl. systematische Abweichungen wie “Nullpunktverstellung” oder “Skalenabweichungen”?

Eine Temperaturänderung verursacht bei Festkörpern eine thermische Längenänderung: Welche Umgebungsbedingungen können das Endergebnis beeinflussen und wie ist ihre Wirkung qualitativ und quantitativ einzuschätzen?



Analyse der Messunsicherheit („Fehleranalyse“)

Anwendung der „Fehlerfortpflanzung“

Zylindervolumen: $V = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h$

Durchmesser d und Höhe h nicht beliebig genau messbar, unvermeidlich also mit den messtechnisch bedingten “Unsicherheiten” von

$$\Delta d = 0,01 \text{ mm und } \Delta h = 0,1 \text{ mm}$$

behaftet, die nicht “korreliert” sind (Gibt es einen Grund für Korrelation? Nein!)

Fehlerfortpflanzung für unkorrelierte Größen (s. Skript):

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial d} \cdot \Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h} \cdot \Delta h\right)^2}$$

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4} \cdot h \cdot 2d \cdot \Delta d\right)^2 + \left(\frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot \Delta h\right)^2}$$

$$\Delta V = \sqrt{(33,199722)^2 + (51,673112)^2} \text{ mm}^3$$

$$\Delta V = 61,419314 \text{ mm}^3 \approx 61 \text{ mm}^3$$

$$V = (42579 \pm \underline{61}) \text{ mm}^3$$

Faust-Regel im Praktikum: Eine (höchstens zwei) signifikante Ziffern bei Unsicherheiten!

Wichtige Grundbegriffe

Messungen liefern, wie sorgfältig und wissenschaftlich sie auch geplant und durchgeführt werden, **niemals fehlerfreie und beliebig genaue Ergebnisse!**

Messabweichung:

- Differenz (Abweichung) zwischen einem der Messgröße zuzuordnenden Wert (Messwert) und dem unbekanntem wahren Wert (Kann durchaus Null sein, ohne dass es bekannt ist!)

Messunsicherheit:

- von der Messabweichung begrifflich klar zu unterscheiden
- Maß für die Genauigkeit der Messung; kennzeichnet die Streuung oder den Bereich derjenigen Werte, die der Messgröße „vernünftigerweise“ als Schätzwerte für den wahren Wert zugewiesen werden können
- beschreibt Unkenntnis (Unsicherheit) einer Messgröße
- nach einem einheitlichen Verfahren berechnete und in einer bestimmten Weise mitgeteilte Messunsicherheit drückt die Stärke des Vertrauens aus, mit der angenommen werden darf, dass der Wert einer gemessenen Größe unter den Bedingungen der Messung innerhalb eines bestimmten Wertintervalls liegt

Grobe Fehler

Grobe Fehler bzw. Irrtümer, wie sie sich

- aus Missverständnissen oder Fehlüberlegungen bei der Bedienung der Messapparatur,
 - aus falscher Protokollierung von Messdaten oder auch
 - aus Programmfehlern in Auswerteprogrammen ergeben,
- werden **nicht** als Messunsicherheiten betrachtet.

In diesen Fällen sind die Messungen oder Auswertungen **falsch** und müssen **wiederholt** werden. Einzelne Messwerte, die als mit groben Fehlern behaftet erkannt werden, brauchen u. U. bei der Auswertung nicht berücksichtigt zu werden („Streichen“).

Das Vorhandensein grober Fehler erkennt man nur durch **kritisches Überprüfen und Kontrollieren der Ergebnisse**.

Vermeiden kann man sie durch **sorgfältiges** Experimentieren.

Objektivität des Experimentators

Eine nicht zu unterschätzende Fehlerquelle sind die Experimentatoren selbst. Dazu gehört insbesondere eine mangelnde Objektivität. Falsche Messresultate entstehen oft auch dadurch, dass der Experimentator das Resultat aus unzureichenden Daten herausliest, das er haben will: „Der Wunsch ist der Vater des Gedankens.“

DPA-Meldung vom 11.06.2004



Universität Konstanz entzieht Physiker Jan Hendrik Schön Dokortitel

Konstanz (dpa) - Die Universität Konstanz hat dem durch schwere Fälschungsvorwürfe belasteten Physiker Jan Hendrik Schön den Dokortitel entzogen. Wie der in Konstanz erscheinende Südkurier (Freitagsausgabe) berichtet, begründet die Universität ihre Entscheidung mit den zahlreichen spektakulären Manipulationen Schöns in seiner Zeit bei den Bell-Laboratorien in den USA. Dadurch habe sich der einst international als Top-Forscher gefeierte Schön des Titels als unwürdig erwiesen.

Die Universität bezieht sich ausdrücklich nicht auf Fehler in der Doktorarbeit selbst. Sie stützt ihre Entscheidung auf das baden-württembergische Universitätsgesetz, das einen Titelentzug auch auf Grund späteren unwürdigen Verhaltens zulässt. Der bereits als Nobelpreis-Kandidat gehandelte Schön hatte aus den US-amerikanischen Labors heraus von 1998 bis 2001 laufend sensationelle Ergebnisse veröffentlicht. Eine Kommission des Labors hatte ihm 2002 schließlich in 16 Fällen Manipulation von Daten nachgewiesen.

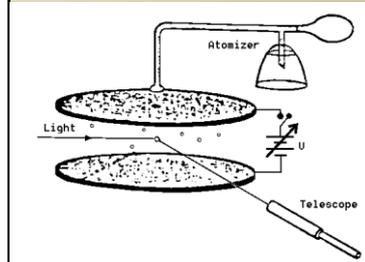
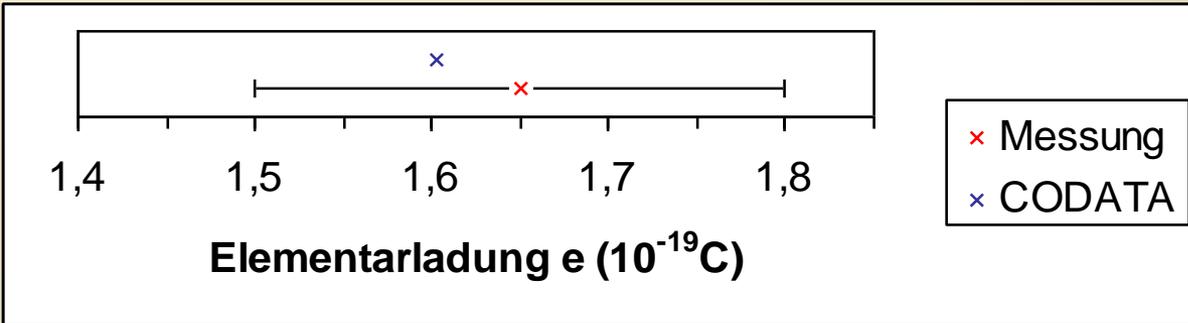
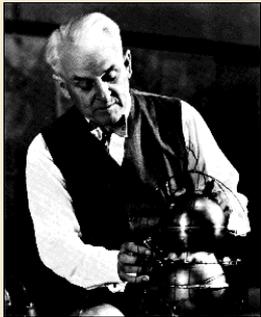
Ein Beispiel zur Illustration

Messung der Elementarladung (Versuch nach R.A. Millikan, 1911):

Ergebnis sei $e = (1,65 \pm 0,15) \cdot 10^{-19} \text{ C}$ in sehr guter Übereinstimmung mit dem "wahren" Wert (vgl. CODATA 2010 - Referenz)

von $e = (1,60217653 \pm 0,00000014) \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Stellenzahl stets sinnvoll reduzieren – Rundung!



Falls aber z. B. Messunsicherheit $\Delta e = \pm 0,015 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; dann zwar ein viel präziseres Ergebnis - aber eindeutig im Widerspruch zum Referenzwert!

Schlußfolgerung:

Entweder hier eine sensationelle Entdeckung (Nobelpreis?) oder (sehr viel wahrscheinlicher!) falsche Messung bzw. eine wichtige und dominierende Fehlerquelle in der Fehleranalyse nicht berücksichtigt.

Ergebnis:

Die Angabe eines Messwertes allein reicht nicht aus! Die Angabe der Messunsicherheit ist unbedingt notwendig, um auf die Aussagekraft der Messung zu schließen!

Schlussfolgerungen

Die Messung einer (physikalischen) Größe ist ohne die Angabe der Messunsicherheit (wissenschaftlich) wert- und sinnlos.



Die Angabe der Messunsicherheit ist kein Negativkriterium oder Mangel, sondern beschreibt die tatsächliche Qualität bzw. Sicherheit eines erzielten Messergebnisses.

Vollständige Darstellung von Messergebnissen

Messwert = (Wahrscheinlichster Wert \pm Messunsicherheit) \cdot Einheit
oder mit

relative Messunsicherheit = Messunsicherheit/Wahrscheinlichster Wert
auch

Messwert = Wahrscheinlichster Wert \cdot Einheit \pm relative Messunsicherheit (%)

Das Messergebnis kennzeichnet ein **Werteintervall**, innerhalb dessen der unbekannte **wahre** Wert mit einer gewissen **Wahrscheinlichkeit** (\downarrow Statistik) bzw. **Sicherheit** erwartet werden kann.

Beispiele:

Elementarladung nach CODATA 2010 – Referenz

$$e = (1,60217653 \pm 0,00000014) \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Volumenangabe für ein Glasgefäß

$$V = 2,5 \text{ l} \pm 5\%$$

Ursachen von Messabweichungen

Grobe Fehler bzw. Irrtümer werden **nicht** als Messunsicherheiten betrachtet.

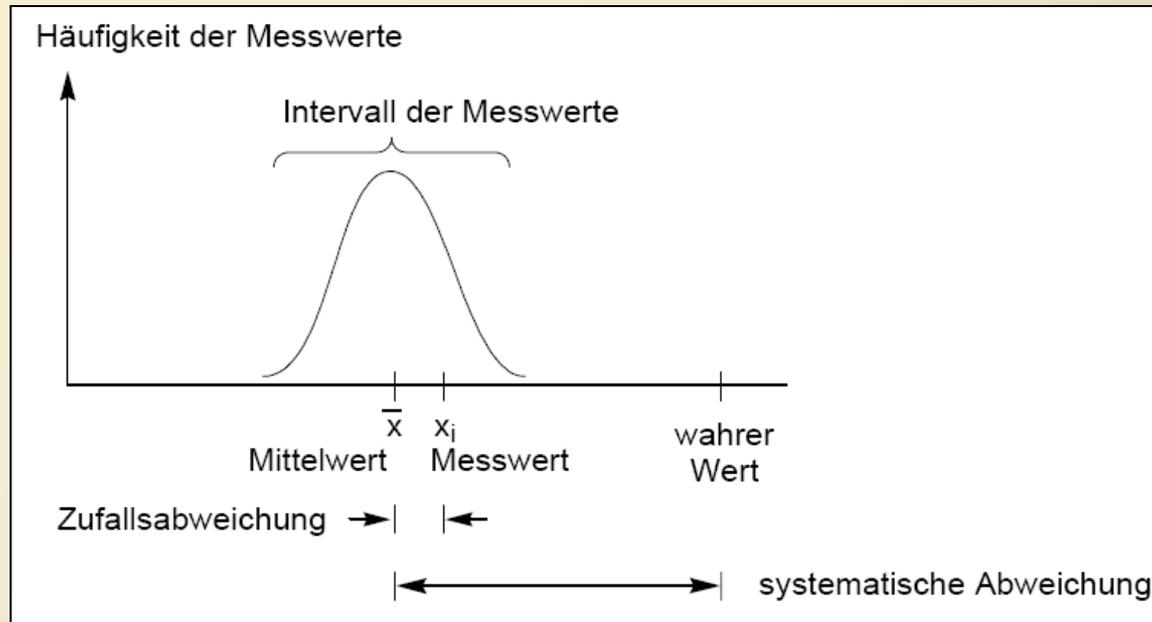
Systematische Messabweichungen:

- haben Ursache im Messgerät, im Messverfahren oder im Beobachter und sind reproduzierbar in Vorzeichen und Betrag
- können in einigen Fällen quantitativ erfasst werden, dann Korrektur des Messergebnisses möglich, aber nicht korrigierbarer Anteil (systematischer Restfehler) verbleibt, meist durch technische Ausführung der Messgeräte bestimmt

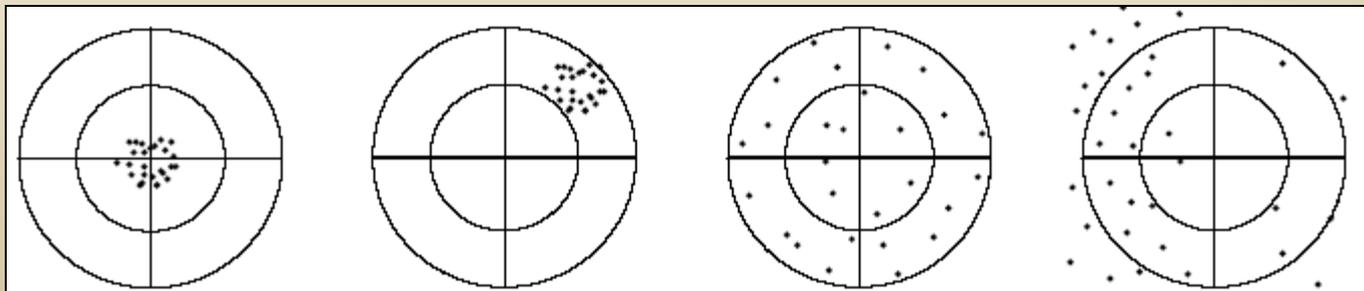
Zufällige Messabweichungen:

- sind Summe vieler kleiner und variierender Störungen von Messgeräten, Messobjekten und Umwelteinflüssen sowie subjektiver Einflüsse des Beobachters, messtechnisch nicht erfassbar und nicht beeinflussbar
- positive und negative Abweichungen gleich häufig, größere Abweichungen seltener als kleinere
- genügen statistischen Gesetzen, Einfluss auf Messergebnis bestimmbar

Unterscheidung von systematischen und zufälligen Messabweichungen



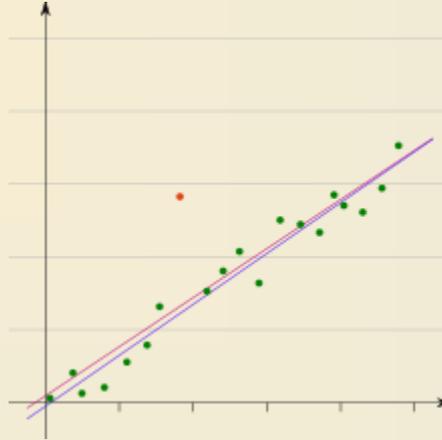
Zufällige Messabweichungen liefern ein *unsicheres*, systematische Messabweichungen ein *falsches* Ergebnis.



Verwerfen von Messwerten („Ausreißern“)

Frage bzw. Problem:

Darf man (einzelne) Messwerte, die innerhalb einer Messreihe *signifikant* abweichen, verwerfen? Zumindest kann in diesem Fall ein grober Fehler oder eine einmalig aufgetretene (z.B. durch Umwelteinflüsse) systematische Messabweichung vermutet werden...



Kritische Betrachtung:

Ein „Ausreißer“ in einer Messung kann das Ergebnis verfälschen. *Aber:* Ein neuer (realer) Effekt kann dadurch leicht übersehen werden.

Jede Daten-Manipulation ist *grundsätzlich* fragwürdig. Eine starke Abweichung kann *nur sachlich begründet* als Fehlmessung interpretiert werden!

Schlussfolgerungen:

Es ist besser, die betreffende Messung zu wiederholen (Reproduzierbarkeitstest!). Eine Überprüfung und kurze Zwischenauswertung während der Messung ist immer ratsam!

Alle Kriterien, die entwickelt wurden, um große Messabweichungen zu verwerfen, sind als fragwürdig anzusehen. Keinesfalls verwenden!

Vgl. auch Stichwort „Objektivität des Experimentators“

Längenmessmittel (Auswahl)

Messmittel	Betrag des Teilungsfehlers ΔL für gemessene Länge L
Büromaßstab	$200 \mu\text{m} + 10^{-3} \cdot L$
Stahlmaßstab	$50 \mu\text{m} + 5 \cdot 10^{-5} \cdot L$
Messschieber	$50 \mu\text{m} + 10^{-4} \cdot L$
Bügelmessschraube	$5 \mu\text{m} + 10^{-5} \cdot L$



Messung mit einer Bügelmessschraube

Skalenhülse mit zweifacher Teilung \rightarrow Ablesung 5,5 mm

Skalentrommel mit Teilung von 0 bis 50; eine volle Umdrehung der Trommel entspricht 0,5 mm \rightarrow 0,01 mm pro Teilstrich (noch 1/2 Teilstrich schätzbar); Ablesung der Skalentrommel 0,28 mm

Messwert: $l = 5,78 \text{ mm}$

Abschätzung der Unsicherheit: $\Delta l = 5 \mu\text{m} + 10^{-5} \cdot 5,78 \text{ mm} \approx 5 \mu\text{m}$

vollständiges Messergebnis: $l = (5,780 \pm 0,005) \text{ mm}$

Zeitmessmittel (Auswahl)

Analog-Stoppuhr: Messzeit t , Eichfehlergrenze Δt (s)		
Zeigerumlauf (s)	30	60
Δt (s)	$0,2 \text{ s} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot t$	$0,4 \text{ s} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot t$
Digital-Stoppuhr: Messzeit t , Eichfehlergrenze Δt (s)		
Δt (s)	$0,01 \text{ s} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot t$	



Messung mit einer Digital-Stoppuhr (Auflösung 0,01 s)

Anzeigewert: 0:03:26.34

Messwert: $t = 206,34 \text{ s}$

Messunsicherheit: $\Delta t = 0,01 \text{ s} + 0,103 \text{ s} \approx 0,11 \text{ s}$

vollständiges Messergebnis: $t = (206,34 \pm 0,11) \text{ s}$

→ Nicht die Auflösung bestimmt die Messunsicherheit!
(Verzögerung durch „Reaktionszeit“ aber noch gar nicht berücksichtigt.)

Elektrische Analog-Messgeräte



Messung mit Analog-Voltmeter (Drehspulinstrument in senkrechter Lage)

Anzeigewert: 160 V (Wechselspannung wegen ~)

Genauigkeitsklasse: 1,5 % (immer vom **Messbereichsendwert!**)

Messunsicherheit: $\Delta U = 1,5 \% \cdot 300 \text{ V} = 4,5 \text{ V}$

vollständiges Messergebnis: $U = (160,0 \pm 4,5) \text{ V}$

→ Für eine Messung nach Möglichkeit Messbereich ausnutzen, um die relative Messunsicherheit gering zu halten! („Schätzfehler“ der Ablesung unberücksichtigt.)

Elektrische Digital-Messgeräte

Messung mit Digital-Multimeter

Anzeigewert: 127,64 V (Wechselspannung wegen AC)

Gebrauchsanweisung:
für Messbereich eine Genauigkeit von **3 %** + **5** Digit
(fast immer in % vom aktuellen Messwert gemeint)

Messunsicherheit:

$$\Delta U = 3 \% \cdot 127,64 \text{ V} + 5 \cdot 0,01 \text{ V} = (3,8292 + 0,05) \text{ V}$$

$$\Delta U \approx 3,9 \text{ V}$$

vollständiges Messergebnis: $U = (127,6 \pm 3,9) \text{ V}$

→ Meist ist nicht der Digitfehler signifikant!

Falls gar keine Angabe, dann mit ± 1 Digit (LSD) als Mindestunsicherheit abzuschätzen!



Was lernen wir aus den Beispielen?

In der Experimentalphysik gibt es für uns grundsätzlich keine Messtechnik bzw. Messgeräte, die wir als „Black Box“ (d.h. ohne jegliche Kenntnis der verwendeten Messprinzipien bzw. –verfahren mit ihren unvermeidlichen „Unzulänglichkeiten“) „blind“ nutzen sollten.

Es gibt keine „fehlerfreien“ Messgeräte; auch digitale Messgeräte können nicht „beliebig genau“ arbeiten. Die „Digits“ (Stellenzahl) suggerieren meist eine irrealen Messgenauigkeit.

Eine „unkritische“ Verwendung von Messtechnik (d.h. ohne Betrachtung der konkreten Messabweichungen bzw. Messunsicherheiten) führt zwangsläufig zu wissenschaftlich mindestens sehr fragwürdigen Ergebnissen.

Nur bei Kenntnis von Geräten und Verfahren gelangen wir zu einer realistischen Beurteilung von erzielten Messergebnissen.

Sei grundsätzlich misstrauisch und kritisch gegenüber Messergebnissen, das gilt auch für die eigene Arbeit!

In der VL Experimentalphysik auch öfter mal nachfragen: „Wie misst man das denn in der Praxis?“ Nicht alles war/ist so „einfach“, wie die VL und auch Lehrbücher es oft suggerieren...

