Institut für Physik
Physikalisches Grundpraktikum

Einführung in die Messung, Auswertung und Darstellung experimenteller Ergebnisse in der Physik (Teil 2)

Einige Anmerkungen zur statistischen Behandlung von Messunsicherheiten

Beispiel zur Relevanz der Fehleranalyse

Entwicklung der Globaltemperatur und Klimawandel?

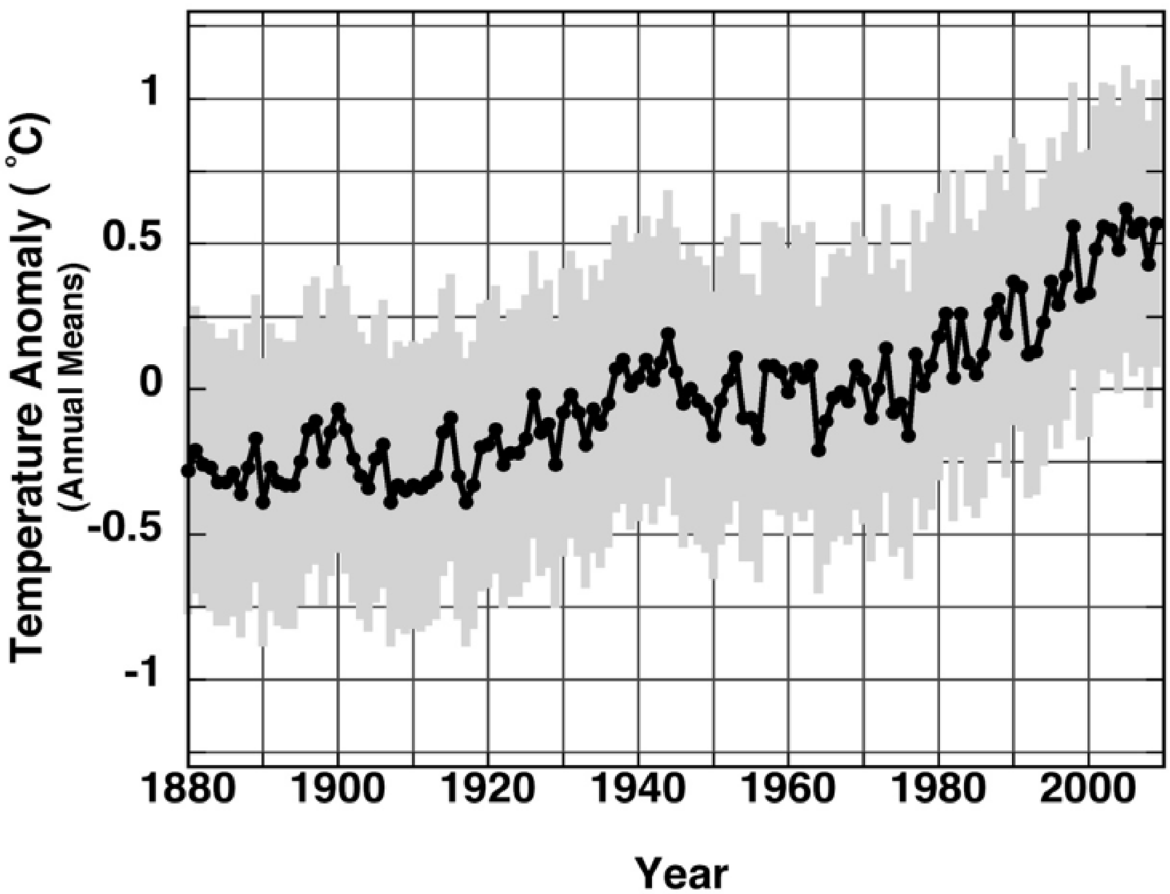
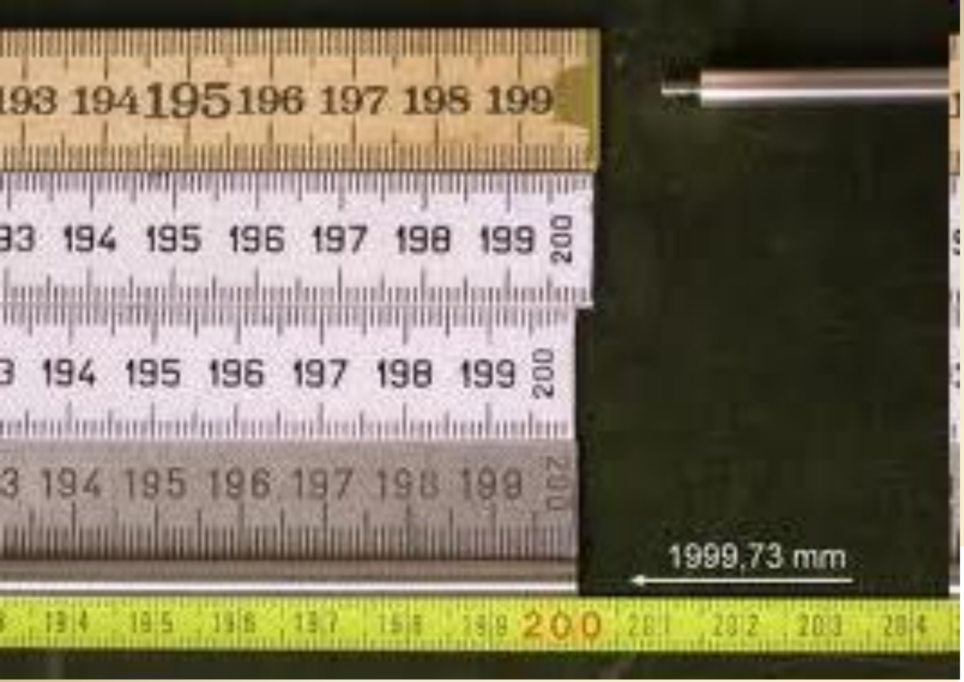


Figure 3. (•), the global surface air temperature anomaly series through 2009, as updated on 18 February 2010, (http://data.giss.nasa.gov/gistemp/graphs/). The grey error bars show the annual anomaly lower-limit uncertainty of ±0.46 C.

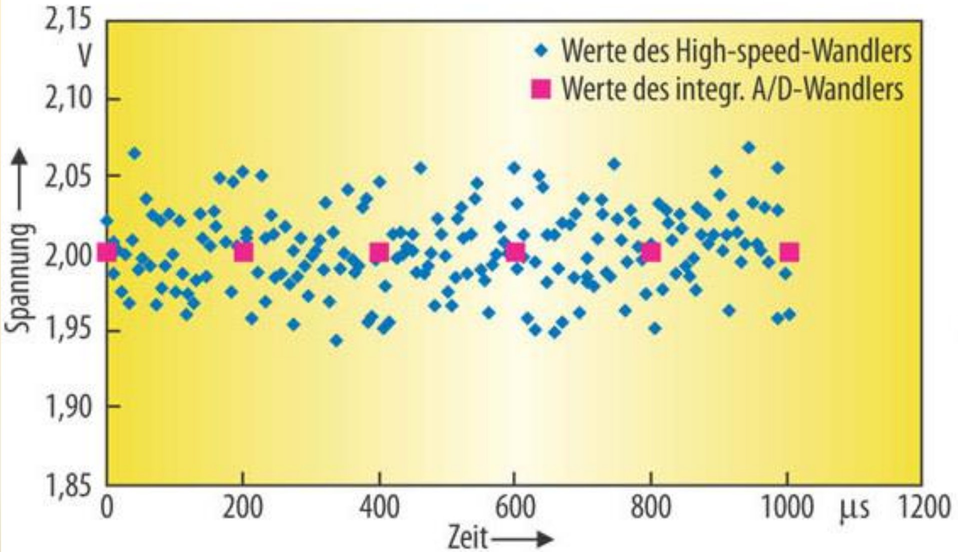
Bisher aber Unsicherheit von ± 0,1 K angenommen…

Quelle:

Energy & Environment Vol. 21 No. 8 (2010), pp. 969-989, Pat Frank, „Uncertainty in the global average surface air temperature index: representative lower limit“



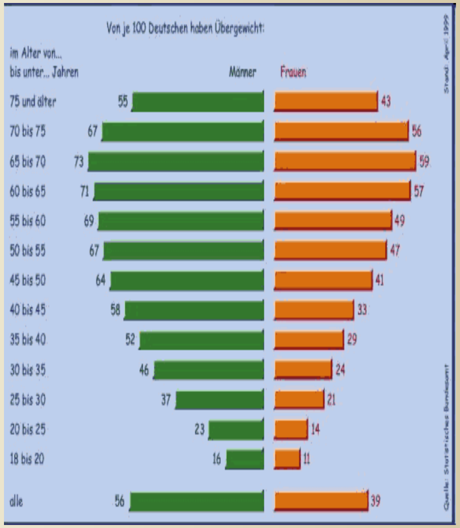
Systematische Messabweichungen



Zufällige Messabweichungen

Schätzung von Messunsicherheiten – ein Problem?

Ja! Oft ist eine einfache Abschätzung nicht möglich oder gar nicht „sachgerecht“…

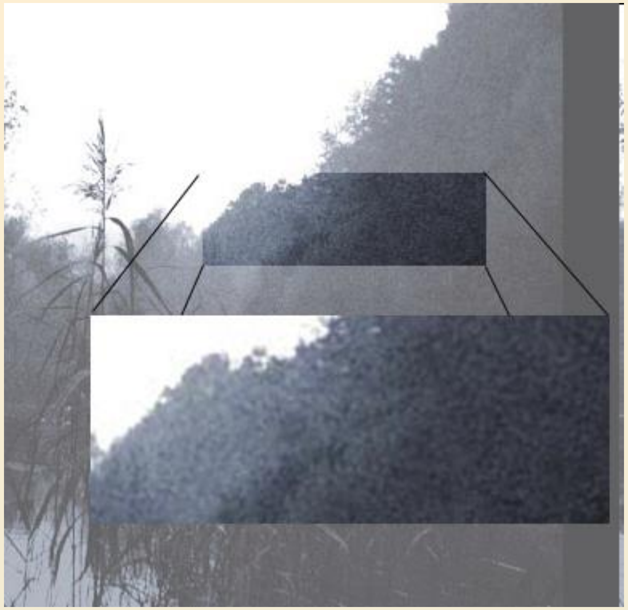


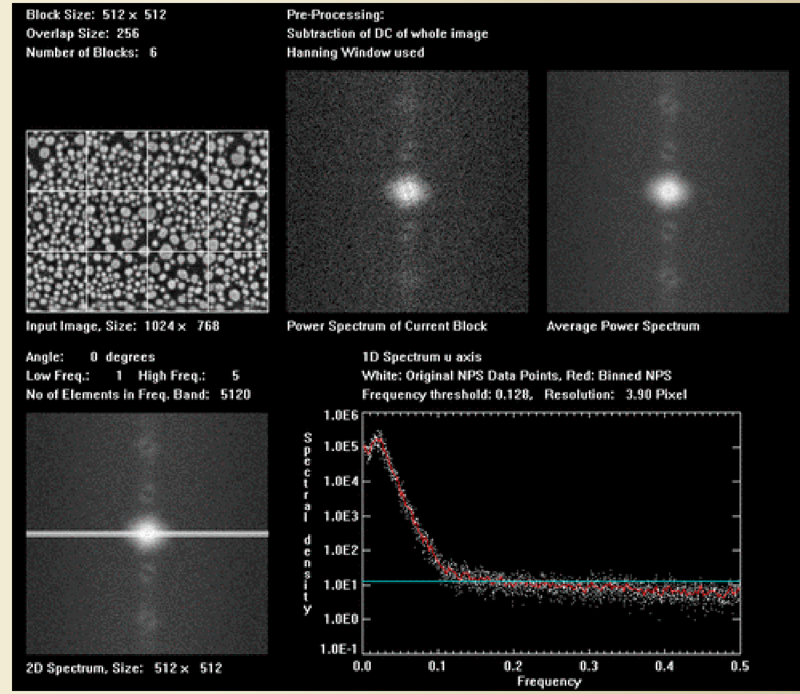
anstelle einer Einzel- mehrere *wiederholte* Messungen, die dann mit Methoden der (mathematischen) Statistik untersucht werden können bzw. müssen

bei Messreihen ein und dieselbe Messung unter möglichst *identischen* Bedingungen (Achtung: Umwelteinflüsse!) im statistischen Sinne „genügend oft“ (d.h. mit ausreichendem Stichprobenumfang) wiederholen; hier im Praktikum i.d.R. mindestens 6 Messungen

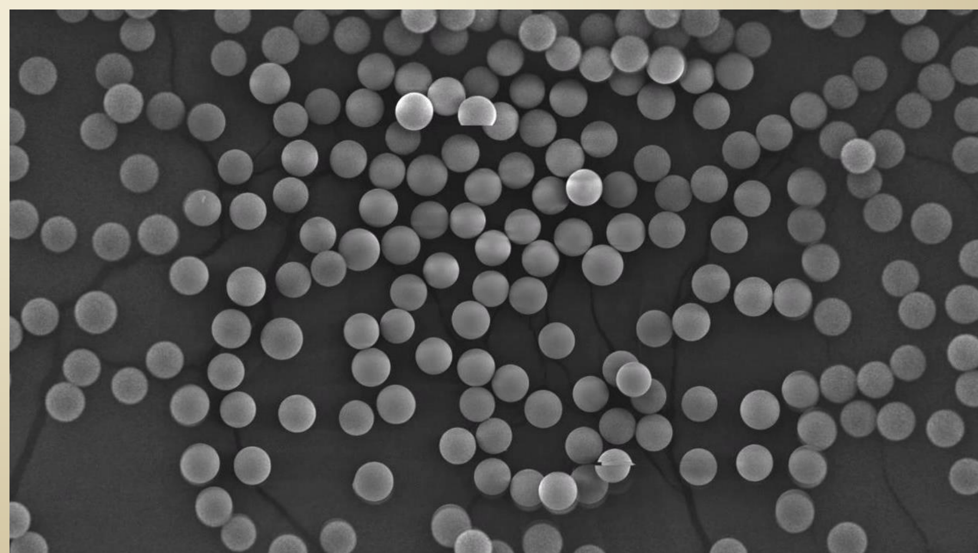
Statistik bedeutet *Erhöhung der Messzeit und des Aufwandes*; also Relation zwischen Aufwand und Nutzen stets sehr genau abwägen (manchmal aber dennoch zwingend nötig!)

Schätzung von Messunsicherheiten – ein Problem?





Untersuchung von größeren „Stichproben“ nicht selten erforderlich!



Zufällige Messabweichungen

Messwiederholungen (selbst unter identischen Bedingungen):
liefern i. A. nicht immer denselben Messwert, sondern haben Abweichungen!

Begriff „ zufällige Messabweichungen“:
wenn unterschiedlich in ihrer Größe und Richtung → zufällige Messabweichungen
Eigenschaft "zufällig" = Ursachen nicht im Einzelnen zu verfolgen, stochastisches (d.h. dem Zufall unterworfenes) Verhalten der Messergebnisse → Messwerte haben Wahrscheinlichkeitscharakter

Ursachen

a) ***statistische Messgröße***
stochastischer Charakter von gemessenen Ereignissen (z.B. radioaktiver Zerfall, „Rauschen“ in elektrischen Signalen)
b) ***Unzulänglichkeit des Experiments oder Experimentators***
Schätzungen und Interpolationen auf Messskalen (Achtung: Parallaxenfehler)
Messen einer Zeitdifferenz mit der Stoppuhr mit Reaktionszeit
Längenmessung mit Maßband unterschiedlicher Verbiegung
c) ***äußere Einflüsse***
zufällige unvorhersehbare äußere Einflüsse (z.B. wechselnde Luftströmungen, kurzzeitige Temperaturschwankungen etc.)

Aufgaben der mathematischen Statistik

Stochastik

Mathematische Statistik | **Wahrscheinlichkeitstheorie**

Mathematische Statistik: Analyse von Daten anhand mathematischer Modelle

Schätztheorie: Entwicklung geeigneter *Schätzverfahren* und Ableitung von *Schätzfunktionen* für statistische Untersuchungen; Bereichsschätzungen von Parametern einer *Grundgesamtheit*, aus der *Stichproben* gezogen werden (Konfidenzintervalle!); Bestätigung oder Verwerfen von *Hypothesen* durch geeignete statistische *Testverfahren*

Zielsetzungen:

empirische Verteilung der *Merkmalswerte* der Stichprobe → Abschätzung bzw. Bestimmung der theoretischen Verteilung der Grundgesamtheit

Bestimmung der *Parameter* der theoretischen *Verteilung* mit optimaler *Anpassung* für die Stichprobenwerte; Ermittlung der *Parameterabhängigkeiten* für die Verteilung

Untersuchung der *Korrelation* zwischen verschiedenen Merkmalen gleicher Objekte oder zwischen dem gleichen Merkmal verschiedener Objekte

Entwicklung von Verfahren zur empirischen Bestimmung von „möglichst guten" *Näherungswerten* und ihrer Streuung bzw. (statistischen) *Unsicherheit*

Vgl. Mathematik der Sekundarstufe II: Teilgebiet „Stochastik"

Grundbegriffe der Statistik

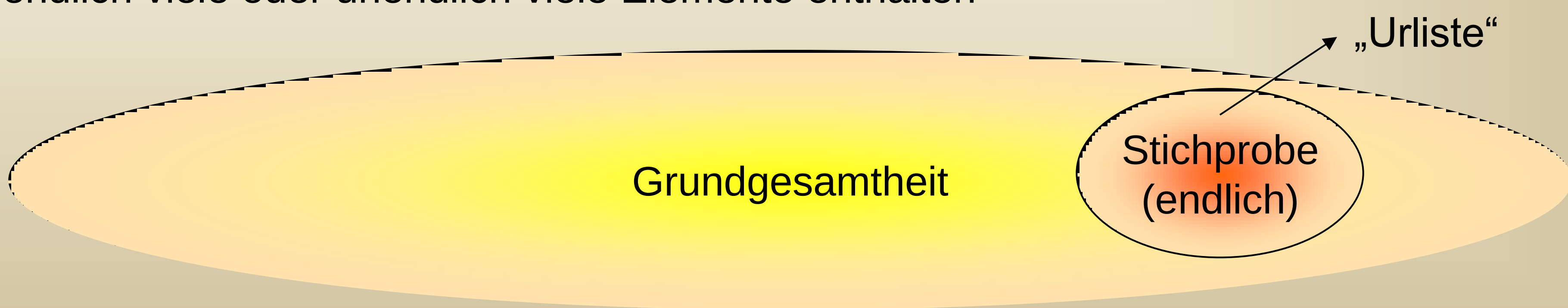
Mathematische Statistik:
Untersuchung zufälliger Ereignisse bezüglich eines oder mehrerer quantitativ erfassbarer Merkmale; Zuordnung von Zahlenwerten als sog. **Zufallsvariable**

Zufallsvariable
(als quantitatives Merkmal eines zufälligen Ereignisses)

Zufallsvariable
mit diskreten Merkmalswerten
(z. B. Zerfallsrate eines Isotops)

Zufallsvariable
mit kontinuierlichen Merkmalswerten
(z. B. Lebensdauer von Ladungsträgern)

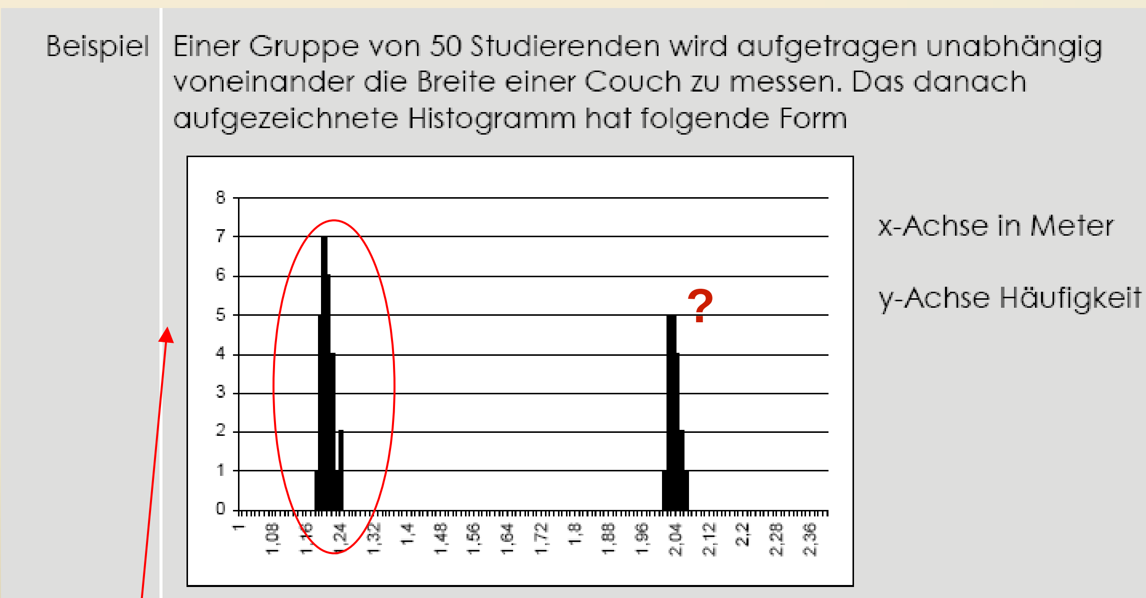
Grundgesamtheit:
Gesamtheit aller möglichen Realisierungen des zufallsbedingten Merkmals; kann endlich viele oder unendlich viele Elemente enthalten



Häufigkeitsverteilung

Erhebung einer Stichprobe:
Umfang N bezüglich des Merkmals x → Tabelle der beobachteten Merkmalswerte x_i ("Urliste der Elemente")

Häufigkeitsverteilung:
Messwerte streuen → Veranschaulichung mit Häufigkeitsverteilung, d.h. Auftragung der Anzahl n_i der in einem Intervall Δx gefundenen Messwerte („absolute Häufigkeit") über Messwerten x_i



hier absolute Häufigkeit aufgetragen

relative Häufigkeit:

$$f_i(x_i) = \frac{n_i}{N}$$

Normierte Verteilung:

$$\sum_{i=1}^{N} f_i(x_i) = 1$$

$f_i(x_i) \cdot \Delta x$ ist die Wahrscheinlichkeit, ein Messergebnis xi im Intervall Δx zu finden

(statistische Aussage)

Anmerkungen zur Klasseneinteilung

Allgemein:
Bereich möglicher Merkmalswerte → Einteilung in M gleichgroße Intervalle der Breite Δx (Klassen)
Mitte der Klasse → möglichst einfache Zahl x_m (Klassenmitte) mit $m = 1..M$
Ermittlung der absoluten Häufigkeit der Merkmalswerte im Intervall $(x_m-\Delta x/2; x_m+\Delta x/2)$
auf Klassengrenzen entfallende Merkmalswerte je zu 1/2 der rechten und der linken Klasse zugeordnet

Kriterien:
- nicht zu eng (zu geringe Häufigkeiten → große Schwankungen; d.h. zu feine Diskretisierung)
- nicht zu weit (drohender Informationsverlust; zu grobe Diskretisierung)

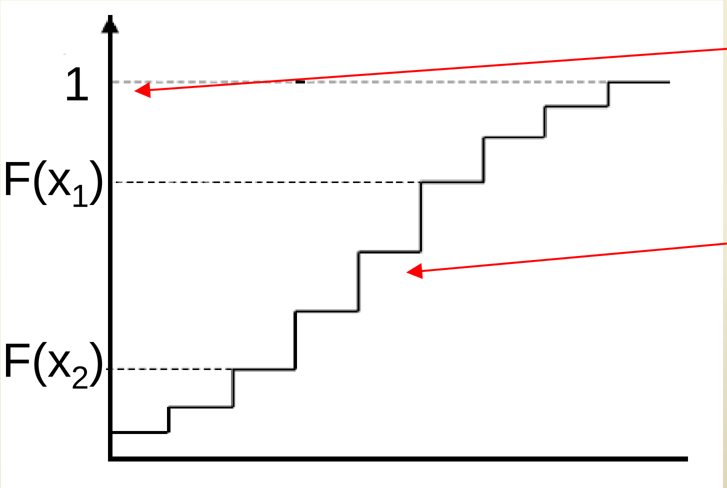
Empfehlungen für sinnvolle Klassenzahl M und Klassenbreite Δx:
$M \approx 5 \cdot \lg N$ und $\Delta x \approx (x_{max}-x_{min})/N$

Generelle Anmerkung:
physikalische Größen oft kontinuierlich verteilt; Mess- und Ablesegenauigkeit aber begrenzt → Diskretisierung der Messergebnisse, z.T. mit gleichem Zahlenwert
Durch die Mess- und Ablesegenauigkeit feinste Klasseneinteilung gegeben, eine gröbere aber meistens sinnvoller!

Summenhäufigkeitsverteilung

Berechnung aus der relativen Häufigkeitsverteilung: $$F(x_j) = \sum_{x_i \le x_j} f_i(x_i)$$

Summation der relativen Häufigkeiten bis zum Wert x_j → statistische Interpretation als die Wahrscheinlichkeit, einen Wert x_i im Intervall $(0;x_j)$ zu finden



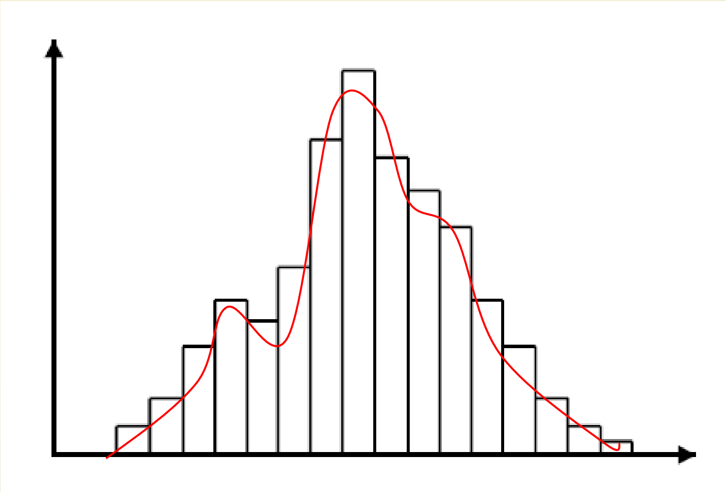
Normierungseigenschaft

statistische Interpretation von $F(x_1)$-$F(x_2)$ als Wahrscheinlichkeit, einen Wert x_i im Intervall (x_1,x_2) vorzufinden

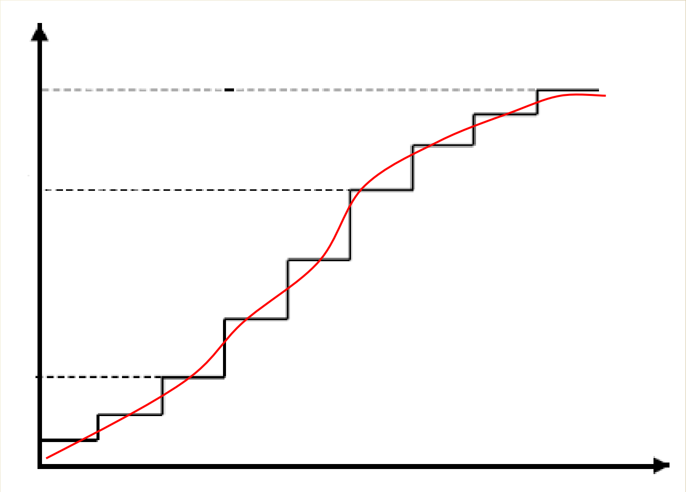
Übergang zu kontinuierlichen Verteilungen

Grenzwertbetrachtung:
unendlich große Stichprobe $N \rightarrow \infty$
unendlich große Klassenzahl $M \rightarrow \infty$
infinitesimal feine Intervalleinteilung $\Delta x \rightarrow 0$ (Übergang zum Differential dx)

Übergang von diskreten Verteilungen/Funktionen zu kontinuierlichen!



→ f(x) als Wahrscheinlichkeitsdichte



→ F(x) als integrale Wahrscheinlichkeitsdichte

Wahrscheinlichkeitsverteilungen: Parameter

Definition des Mittelwertes:
erstes Moment einer Verteilung, beschreibt ihre Lage

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Definition der Varianz:
zweites Moment einer Verteilung, beschreibt ihre Breite

$$s^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx$$

Definition der Standardabweichung:
direktes Maß für die Breite der Verteilungsfunktion, d.h. die Streuung der Werte

$$s = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx}$$

Für uns zweckmäßiger!

$$s^2 = \int x^2 f(x) dx - 2\bar{x} \int x f(x) dx + \bar{x}^2 \int f(x) dx$$

$$s^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

Beispiele für Verteilungsfunktionen

Gleichverteilung

Poissonverteilung

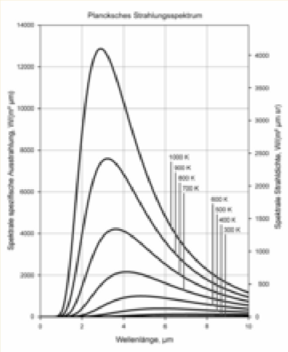
Binomial- bzw. Bernoulliverteilung

Hypergeometrische Verteilung

Gauß- oder Normalverteilung

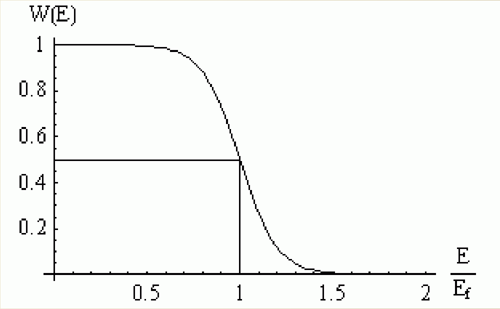
Geometrische Verteilung

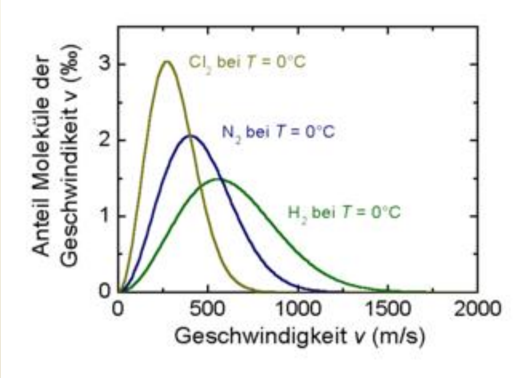
Verteilungen in der (statistischen) Physik



Plancksches Strahlungsgesetz

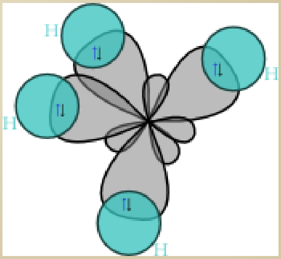
Fermiverteilung



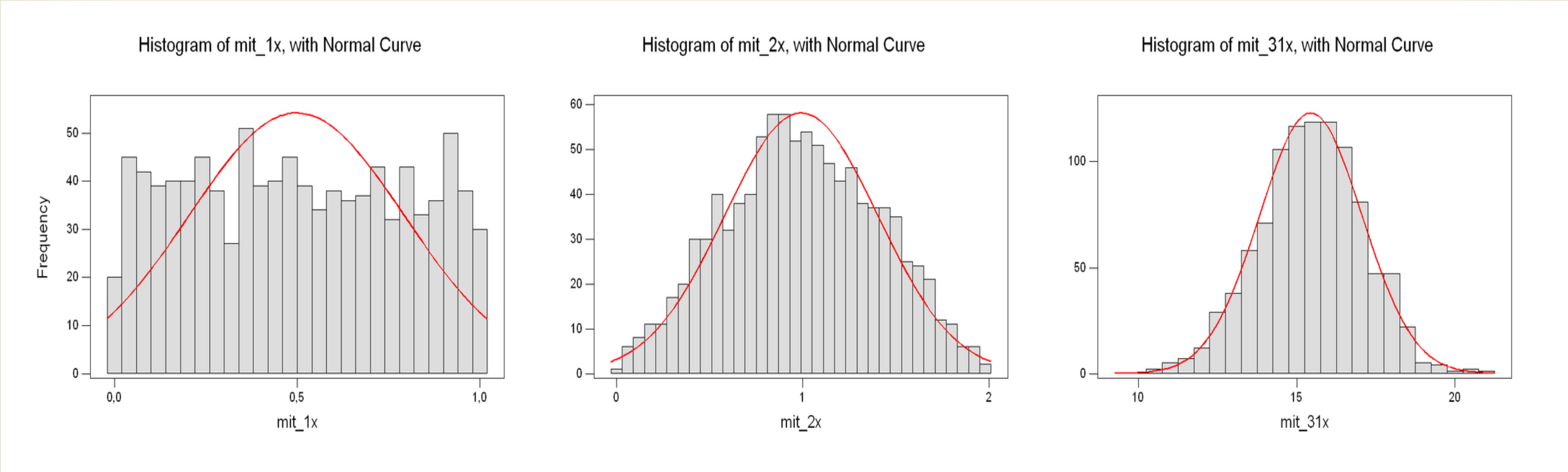


Maxwell-Boltzmannsche Geschwindigkeitsverteilung

Orbitale von Elektronen



Zentraler Grenzwertsatz der Statistik

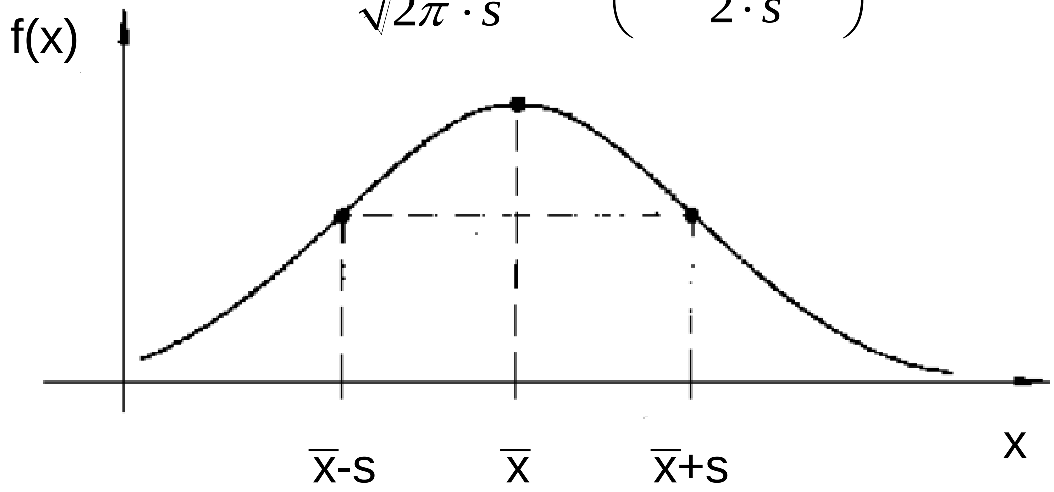


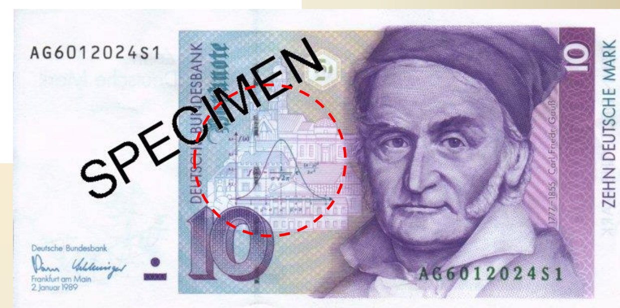
Die Verteilungen der Summen von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen streben mit wachsendem Stichprobenumfang gegen die Gaußsche Normalverteilung. (Faustregel: bei mehr als 30 stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen schon sehr gute Näherung)

Diese Regel ermöglicht zum einen die Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten unbekannt verteilter Zufallsvariablen, zum anderen kann die Bestimmung kompliziert zu berechnender Wahrscheinlichkeitswerte mit der Normalverteilung approximiert werden.

Gauß- oder Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot s} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\overline{x})^2}{2 \cdot s^2} \right)$$



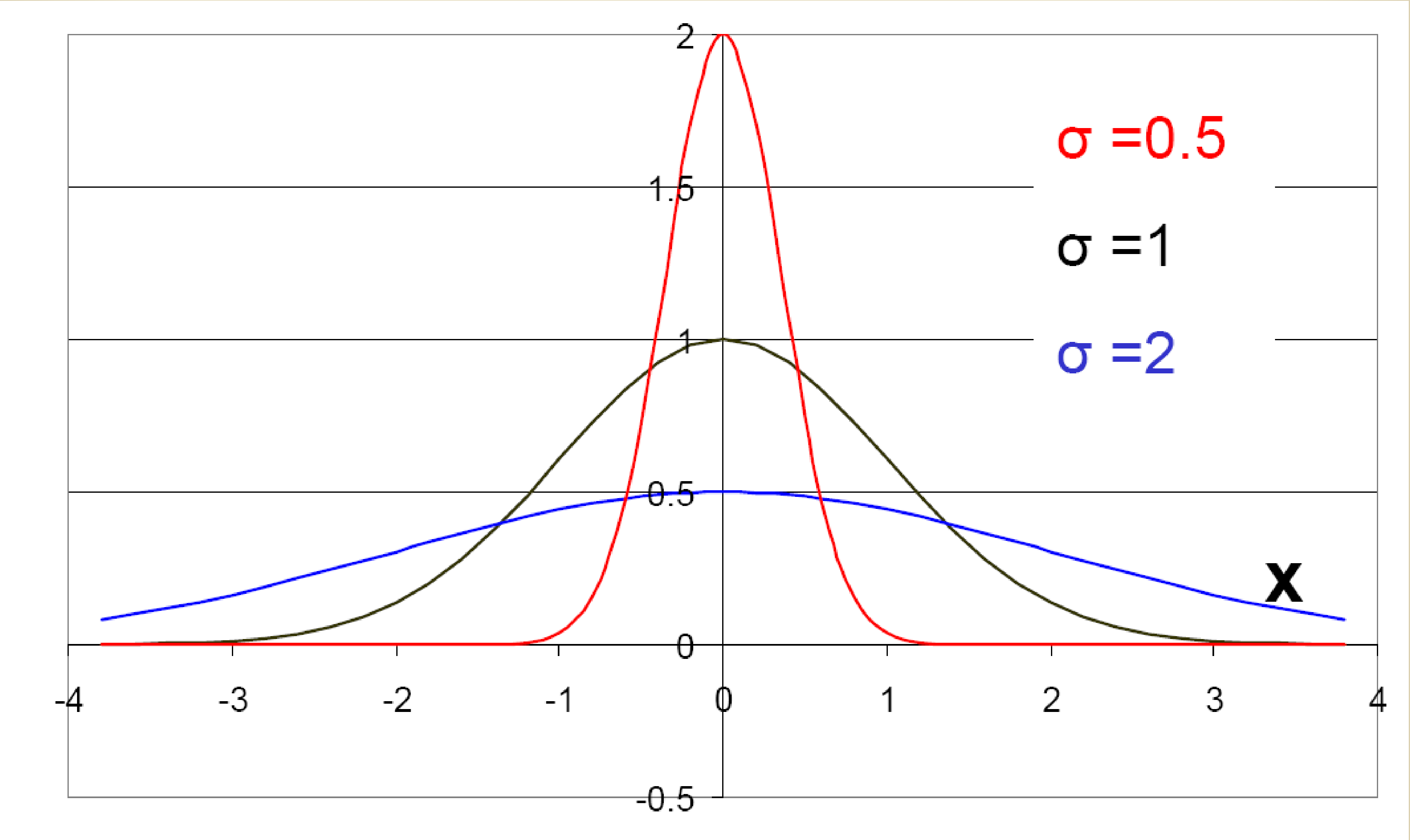


Eigenschaften:

•Maximum beim Mittelwert (Erwartungswert), Symmetrie bezüglich Mittelwert
•Konvergenz gegen Null im Unendlichen
•Wendepunkte für Mittelwert ± Standardabweichung
•Breite durch Standardabweichung bestimmt
•Normierung auf 1 (vgl. statistische Interpretation!)

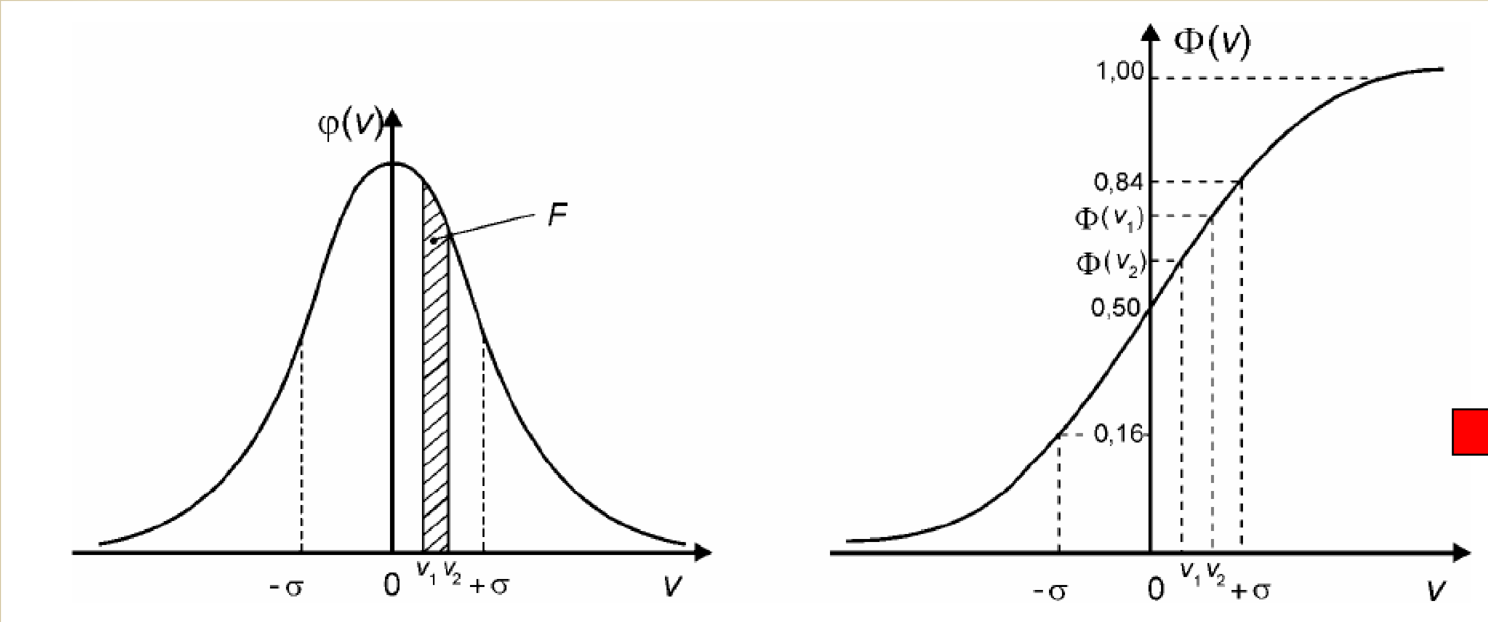
Intervall um Mittelwert	Wahrscheinlichkeit
±s	68,3%
±2s	95,4%
±3s	99,7%

Normierungseigenschaft der Normalverteilung



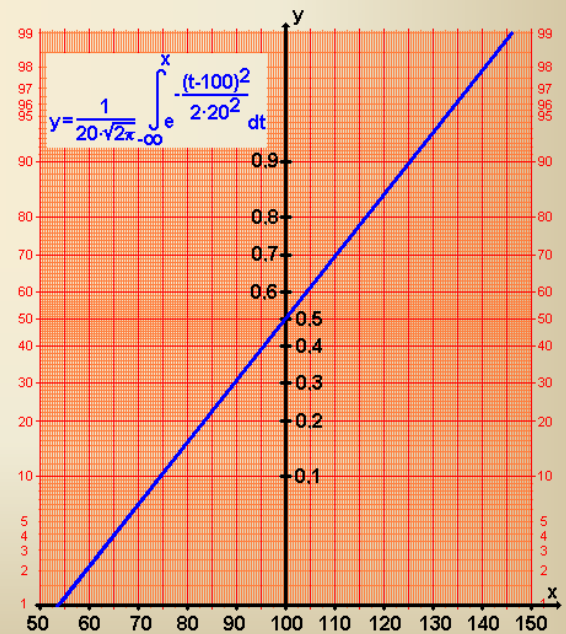
Die Parameter „Mittelwert“ und „Standardabweichung“ ermöglichen es, dass *unterschiedliche* Modellverteilungen durch die Gaußverteilung beschrieben werden können.

Gaußsche Fehlerfunktion



Eigenschaften:

- Statistische Interpretation als Wahrscheinlichkeit für Wert im Intervall
- Monotonieverhalten
- Wendepunkt für Mittel- bzw. Erwartungswert



Empirischer Zugang für Parameter der Normalverteilung

Definition des Mittelwertes:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Definition der Standardabweichung:

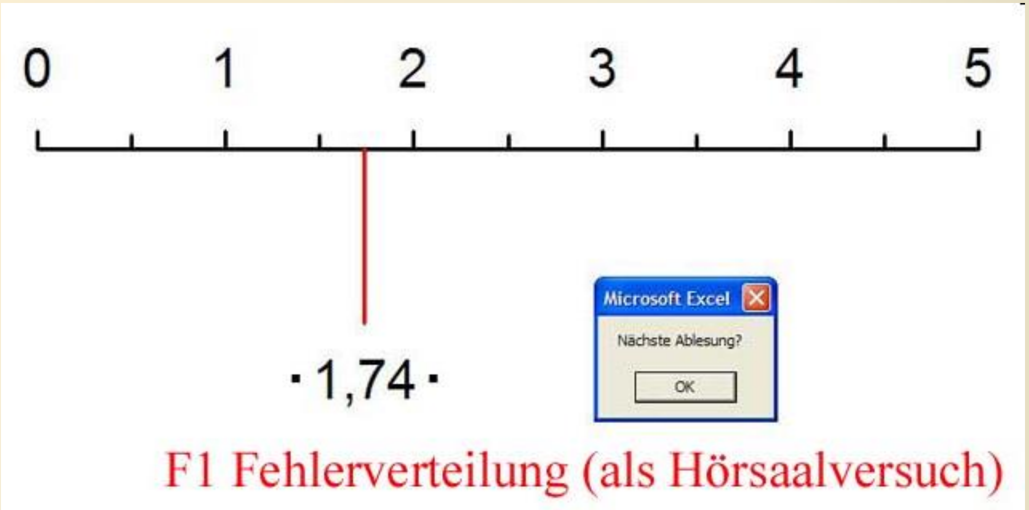
$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$$

Definition des Vertrauensbereiches:

$$\overline{s} = \pm t \frac{s}{\sqrt{n}} = \pm t \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}}$$

	t - Werte für		
n	68,3 %	95,0 %	99,7 %
3	1,32	4,30	19,21
5	1,15	2,78	6,62
6	**1,11**	2,57	5,51
10	**1,06**	2,26	4,03
100	1,00	2,00	3,04

Beispiel: Versuch „F1 Fehlerverteilung"



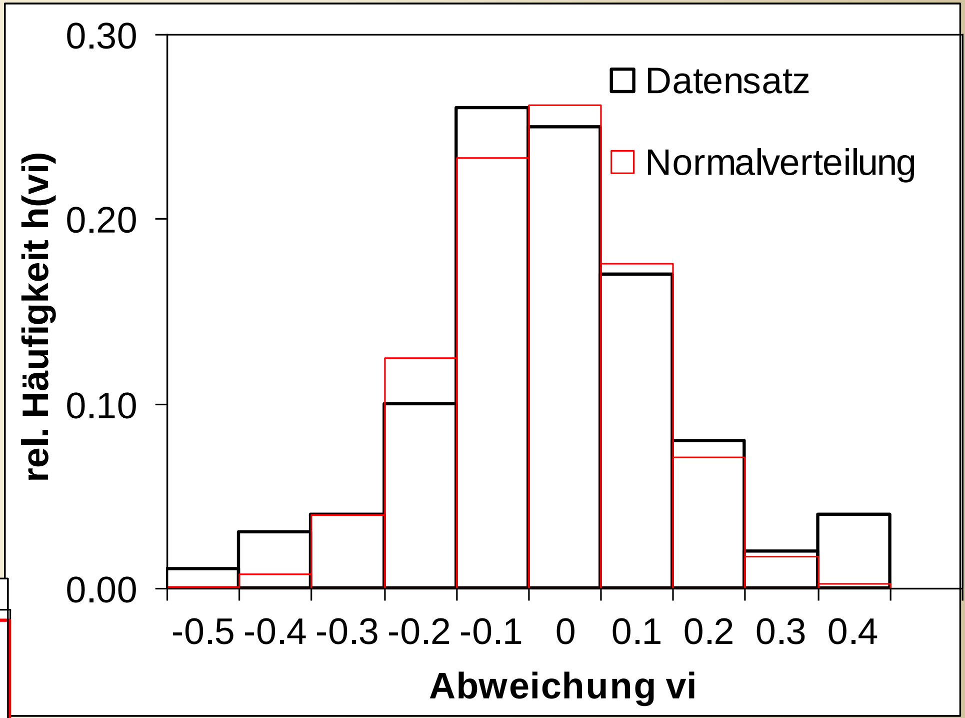
Erzeugung von Zufallszahlen im Intervall (0;5) mit Rundung auf zwei Nachkommastellen

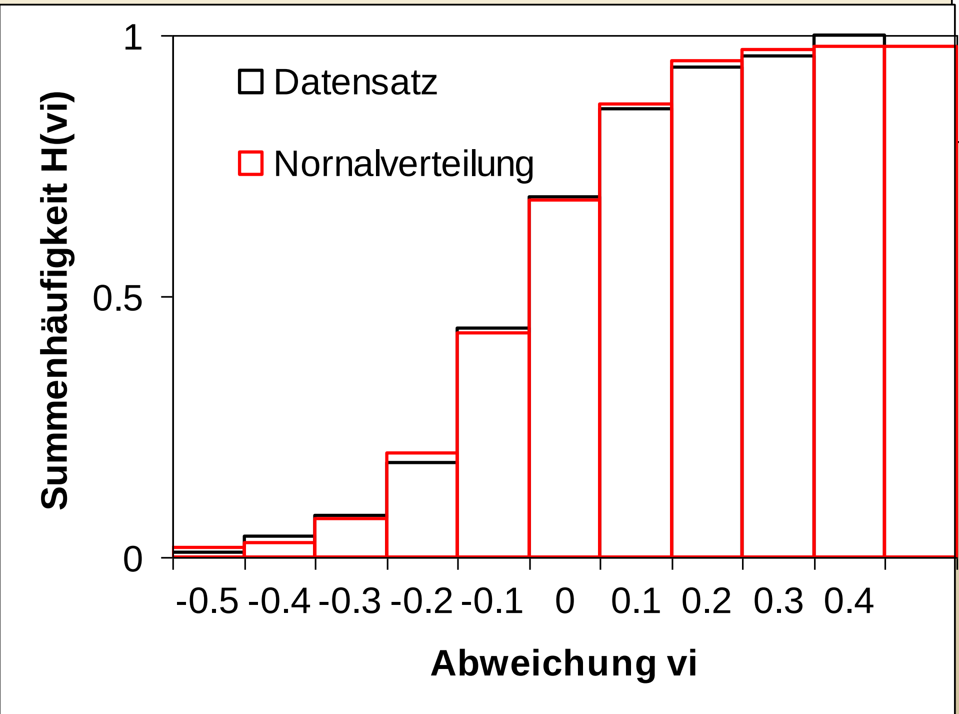
Projektion der hier gezeigten Skale im Hörsaal

Aufgabe für Studierende: Schätzung von insgesamt 100 Werten auf 0,01 genau; mit anschließender statistischer Auswertung der Abweichungen zwischen Schätzwert und (hier „ausnahmsweise" bekanntem!) wahrem Wert

Reale Ergebnisse aus studentischen Daten

Abweichung v_i	relative Häufigkeit h(vi)	Summenhäufigkeit $H(v_i)$
-0.5	0.01	0.01
-0.4	0.03	0.04
-0.3	0.04	0.08
-0.2	0.10	0.18
-0.1	0.26	0.44
0	0.25	0.69
0.1	0.17	0.86
0.2	0.08	0.94
0.3	0.02	0.96
0.4	0.04	1.00





Vorzeichentest: $|n^+ - n^-| = |31 - 44| = 13$
„erlaubt“: $10 = \sqrt{100} = \sqrt{n}$
→ *klare Asymmetrie der Verteilung mit Verschiebung in negativer Richtung*
Anmerkung: 100 Werte sind zu wenig!!!
($n \to \infty$ für Grenzübergang)
Dieser Studi „untertreibt“ offenbar lieber!

Hörsaal-Versuch
F1 Fehlerverteilung

- Durchführung hier für alle gemeinsam (individuelle Schätzung/Ablesung mit Notíeren der Werte)
- Auswertung zuhause gemäß der Versuchsanleitung (mit allen notwendigen Arbeitsschritten) und Erarbeitung eines (knappen) Berichtes dazu mit allen erforderlichen Grafiken, Betrachtungen und Schlussfolgerungen
- Abgabe wie Übungsaufgabe gemäß Festlegung
- Korrektur/Bewertung durch Übungsleiter
- gemeinsame Besprechung der wesentlichen Ergebnisse in der Übung

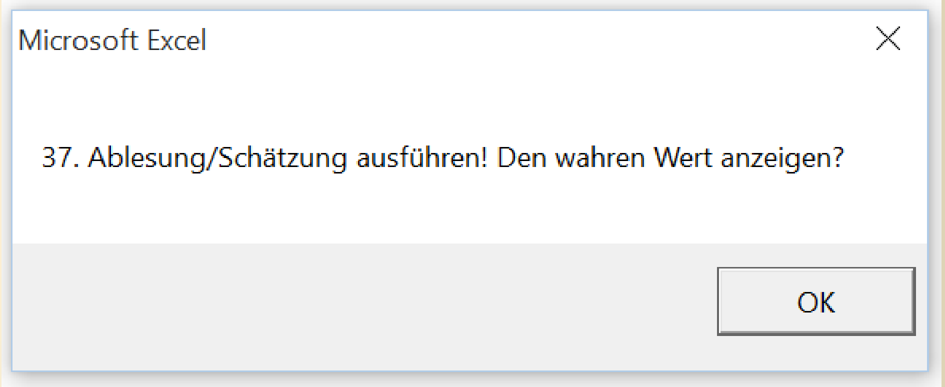
Vorbereitung der Tabelle für die Mess-/Schätzwerte (sog. „Urliste“)

Index	Schätzwert	Wahrer Wert*
1	3,85	3,81
2	2,01	2,01
3	4,95	4,97

1. Zunächst nur den Tabellenkopf vorbereiten - die eigentlichen Zahlenwerte tragen wir jetzt erst im Folgenden ein. Lassen Sie sich noch Platz für weitere Spalten daneben.
2. Die Schätzwerte als „Messgröße“ bestimmt jede/r selbst durch eigene Ablesung einer mit dem Beamer auf der Tafelebene projizierten Skale. (Gibt‘s einen Parallaxenfehler dabei?) Der „wahre Wert“ wird danach gezeigt und „angesagt“.
3. Fehlnotierungen bzw. Schreibfehler u.ä. sind sauber zu streichen (keine Tintenkiller usw. benutzen) und ggf. Korrekturen oder Kommentare daneben anzugeben – Sie arbeiten „dokumentenecht“.
4. Die „wahren Werte“ sind wirklich nur hier im akademischen Lehrbeispiel bekannt - im *realen* Experiment tatsächlich niemals.

Skaleneinteilung für die Ablesung/Schätzung

Anzeige des „wahren Wertes“ erfolgt in einer Box *nach* der Schätzung
(normalerweise unbekannt und deshalb zunächst maskiert)



Die Schätzung erfolgt durch Sie mit einer Genauigkeit von ±0,01 (auf zwei Nachkommastellen genau). Mit Blick auf die Skale werden Sie das wohl eher als ziemlich unsinnig empfinden…

Aber: Warten wir‘s ab, was die Auswertung später zeigt!