In diesem Notebook wollen wir uns mit der Wurfbewegung beschäftigen.

Zunächst betrachten wir einmal die Translation eines geradeaus geworfenen Balls, den wir mit der einer Geschwindigkeit von 60 km/h werfen.

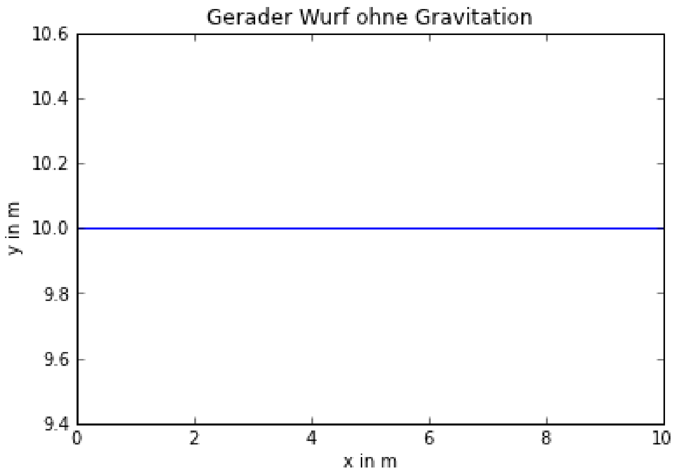
In [1]:
```
# zunächst konstruieren wir uns eine X-achse und denken uns dazu die Einheit 'm'
x = linspace(0,10,100)

# Wir werfen den Ball aus einer Höhe von 10 m los:
y0 = 10
v0_kmh = 25
v0_ms  = v0_kmh*1000/3600  # konvertiert die Geschwindigkeit von km/h in m/s
print "Geschwindigkeit = ",v0_kmh," km/h = ",v0_ms," m/s"

y = y0*ones((100,1))
plot(x,y)
xlabel('x in m')
ylabel('y in m')
title('Gerader Wurf ohne Gravitation')
```

```
Geschwindigkeit =  25  km/h =  6  m/s
```

Out[1]:
```
<matplotlib.text.Text at 0x51a2530>
```



Jetzt berücksichtigen wir auch noch die Gravitation:

Die Bewegungsgleichung ist jetzt

$$x(t) = v_0 t, y(t) = y0 - \frac{1}{2} g t^2$$

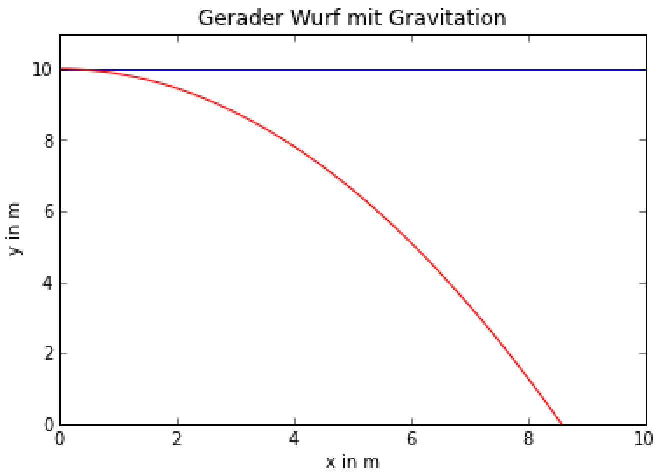
Die erste der beiden Gleichungen können wir umformen nach t als $t = x/v_0$ und bekommen somit eine Beziehung zwischen x und y:

$$y(x) = y0 - \frac{1}{2} g(\frac{x}{v_0})^2$$

In [2]:
```
from scipy.constants import g  # wir importieren die Erdbeschleunigung in m/s^2

y_grav = y0-0.5*g*(x/v0_ms)**2
plot(x,y)
plot(x,y_grav,'r')
xlabel('x in m')
ylabel('y in m')
title('Gerader Wurf mit Gravitation')
ylim(0,11)
```

Out[2]: (0, 11)



Wenn wir jetzt den Wurf nicht horizontal, sondern schräg nach oben richten, dann sieht die Gleichung für den Wurf ohne Gravitation so aus:

$$x(t) = v_0 \cos(\theta)t, y(t) = y_0 + v_0 \sin(\theta)t$$

Wenn wir die Zeit als Funktion von x darstellen

$$t = \frac{x}{v_0 \cos(\theta)}$$

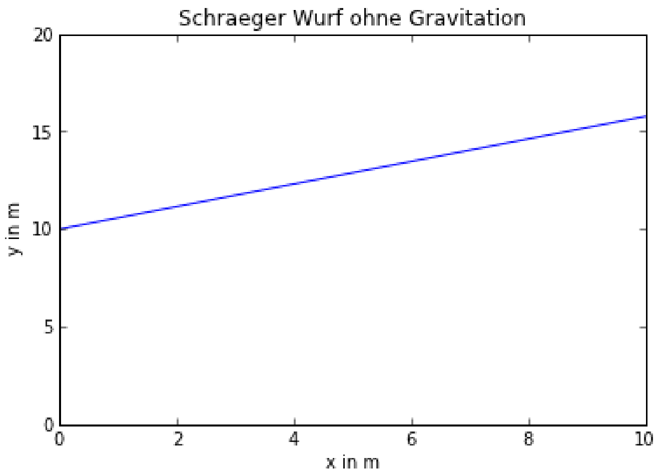
dann können wir auch $y(x)$ berechnen:

$$\Rightarrow y(x) = y0 + x \tan(\theta)$$

In [3]:
```
theta_deg = 30                # Angabe von theta in Grad
theta_rad = theta_deg*pi/180 # zunächst brauchen wir theta in rad

y = y0+x*tan(theta_rad)
plot(x,y)
xlabel('x in m')
ylabel('y in m')
title('Schraeger Wurf ohne Gravitation')
ylim(0,20)
```

Out[3]: (0, 20)



Jetzt schalten wir die Gravitation wieder ein und bekommen aufgrund der Superposition folgende Bewegungsgleichung:

$$x(t) = v_0 \cos(\theta)t, y(t) = y_0 + v_0 \sin(\theta)t - \frac{1}{2} gt^2$$

Wir verfahren jetzt genauso, wie im Schwerelosen Fall, indem wir verwenden, dass

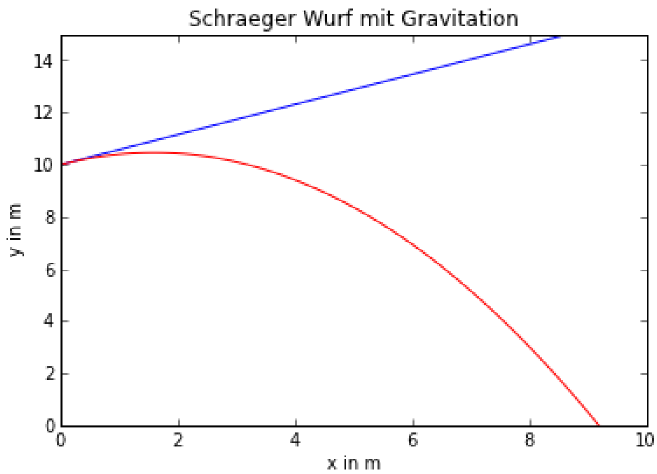
$$t = \frac{x}{v_0 \cos(\theta)}$$

und diesen Eindruck in obige Zeit-abhängige Gleichung einsetzen:

$$y(x) = y0 + x\tan(\theta) - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_0 \cos(\theta)}\right)^2 = y0 + x\tan(\theta) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta)} x^2$$

In [4]:
```
y_grav = y0+x*tan(theta_rad)-g/(2*(v0_ms*cos(theta_rad))**2)*x**2
plot(x,y)
plot(x,y_grav,'r')
xlabel('x in m')
ylabel('y in m')
title('Schraeger Wurf mit Gravitation')
ylim(0,15)
```

Out[4]: (0, 15)



Wir können nun, ganz einfach durch ausprobieren, herausfinden, welcher Wurfwinkel optimal für die gegebenen Parameter (Ausgangshöhe y_0 und Wurfgeschwindigkeit v_0) ist.

Um die Wurfweite heruaszufinden müssen wir den Punkt x finden, für den $y(x) = 0$. Dafür müssen wir die quadratische Gleichung

$$y(x) = 0 = y0 + x\tan(\theta) - \frac{g}{2v_0^2\cos^2(\theta)}x^2$$

lösen. Die Lösung der allgemeinen quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ ist:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Also ist die Wurfweite

$$x_0 = \frac{-\tan(\theta) \pm \sqrt{\tan^2(\theta) + 4\frac{gy_0}{2[v_0\cos(\theta)]^2}}}{-\frac{g}{[v_0\cos(\theta)]^2}}$$

oder etwas vereinfacht (dabei berücksichtigend, dass wir nur positive x_0 suchen):

$$x_0 = \frac{[v_0\cos(\theta)]^2}{g}\left(\tan(\theta) + \sqrt{\tan^2(\theta) + 4\frac{gy_0}{2[v_0\cos(\theta)]^2}}\right)$$

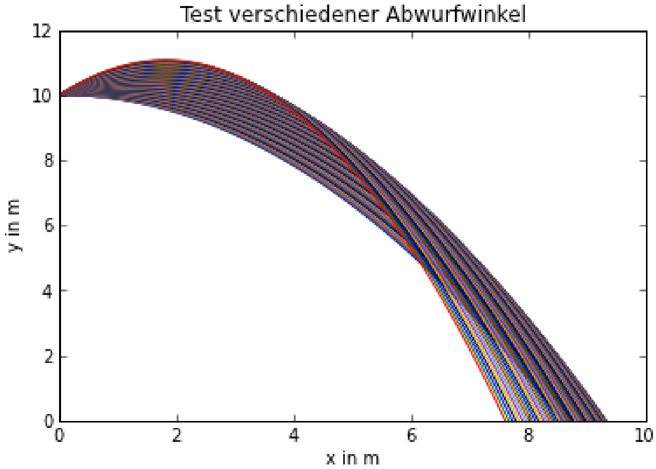
In [5]:
```
# Wir wollen auch die beste Wurfweite im Auge behalten.
# Zunächst nehmen wir an, dass diese 0 ist:
x0_best = 0
Wurfweiten = [] # Generiere eine leere Liste von Wurfweiten
# Jetzt sollten wir noch festlegen, welchen Winkelbereich und wie viele
# Winkel dazwischen wir absuchen möchten:
thetaStart = 0
thetaStop = 50
thetaSteps = 101
thetaWerte = linspace(thetaStart,thetaStop,thetaSteps)

# Jetzt probieren wir eine große Anzahl von Winkeln aus:
for theta_deg in thetaWerte:
    theta_rad = theta_deg*pi/180 # zunächst brauchen wir theta in rad
    # Zur Vereinfachung berechnen wir die X-Komponente der Wurfbewegung:
    vx = v0_ms*cos(theta_rad)
    # Jetzt sieht der Ausdruck für y(x etwas einfacher aus:
    y_grav = y0+x*tan(theta_rad)-0.5*g*(x/vx)**2
    plot(x,y_grav)
    # Berechne die Wurfweite:
    x0 = vx**2/g*(tan(theta_rad)+sqrt(tan(theta_rad)**2+4*g*y0/(2*vx**2)))
    Wurfweiten.append(x0) # Hänge die aktuelle Würfweite an Liste an
    if x0 > x0_best:
        theta_best = theta_deg# Wir wollen auch die beste Wurfweite im Auge behalten.
        x0_best = x0


# Zum Schluß lassen wir uns den weitesten Wurf ausgeben:
print "Bester Wurf: Winkel =",theta_best,"deg, Wurfweite=",x0_best, "m."
# Natürlich wollen wir auch noch die Achsen beschriften:
xlabel('x in m')
ylabel('y in m')
title('Test verschiedener Abwurfwinkel')
ylim(0,12)
```

```
Bester Wurf: Winkel = 21.5 deg, Wurfweite= 9.32178355052 m.
```

Out[5]: (0, 12)



Da wir uns die Wurfweiten alle gemerkt haben, können wir jetzt die Wurfweite als Funktion des Abwurfwinkels darstellen lassen. Den Datenpunkt mit der maximalen Wurfweite können wir separat darstellen.

In [6]:
```
plot(thetaWerte,Wurfweiten)
plot(theta_best,x0_best,'ro')
xlabel('Abwurfwinkel in deg')
ylabel('Wurfweite in m')
title('Wurfweite als Funktion des Winkels')
```

Out[6]:
```
<matplotlib.text.Text at 0x54b7cb0>
```