Scheinkräfte

Wir betrachten ein rotierendes Bezugssystem K', in dem ein Objekt sich entlang der x-Achse bewegt, d.h. in dem System K' wird die Position des Objekt beschrieben durch

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das System K' befindet sich in dem Inertialsystem K und dreht sich im bezugssystem K mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

um die vertikale Achse. Dabei wird die Bewegung $\vec{r}'(t)$ in das Koordinatensystem des Inertialsystems K wie folgt mittels der zeitabhängigen Rotationsmatrix M_{rot} für eine Rotation um die z-Achse folgendermaßen übertragen:

$$\vec{r}(t) = M_{rot}\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{r}'(t)$$

Für den speziellen Fall, dass $\vec{r}'(t)$ nur eine x-Komponente hat, ergibt obige Vektor-Matrix-Multiplikation den folgenden Ausdruck

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t)x'(t) \\ \sin(\omega t)x'(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es ist jetzt unser Ziel, die Beschleunigungen im Bezugssystem K' zu bestimmen. Um das zu tun betrachten wir zunächst Ableitungen der Bewegung aus der Sicht des betrachters im Inertialsystem K, in der Hoffnung, dass wir den resultierenden Ausdruck dann so umformen können, das sich die (Schein-)Beschleunigungen im System K' daraus ergeben.

Da wir unser Koordinatensystem beliebig orientieren können, bleiben wir dabei, die Bewegung in K' auf die x-Achse zu beschränken. Unter Verwendung der Produktregel berechnet sich die Ableitung nach der Zeit unseres Vektors $\vec{r}(t)$ (im Inertialsystem K) dann folgendermaßen:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \left.\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|_K = \begin{pmatrix} \cos(\omega t)\dot{x}'(t) - \omega\sin(\omega t)x'(t) \\ \sin(\omega t)\dot{x}'(t) + \omega\cos(\omega t)x'(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t)\dot{x}'(t) \\ \sin(\omega t)\dot{x}'(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega\sin(\omega t)x'(t) \\ \omega\cos(\omega t)x'(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der erste der beiden resultierenden Vektoren entspricht der rotierenden Version des Vektors, für den nur eine Ableitung nach der Zeit für die Bewegung im rotierenden Bezugssystem K' vorgenommen wurde. Um das zu beschreiben, verwenden wir die folgende Nomenklatur:

$$\begin{pmatrix} \cos(\omega t)\dot{x}'(t) \\ \sin(\omega t)\dot{x}'(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{K'} \vec{r}(t)$$

Der zweite der beiden rotierenden Vektoren entspricht dem Kreuzprodukt von $\vec{\omega}$ und $\vec{r}(t)$:

$$\vec{\omega} \times \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\omega t)x'(t) \\ \sin(\omega t)x'(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega\sin(\omega t)x'(t) \\ \omega\cos(\omega t)x'(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir können also zusammenfassen, dass

$$\dot{\vec{r}}(t) = \left.\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|_K = \left.\frac{d}{dt}\right|_{K'} \vec{r}(t) + \vec{\omega} \times \vec{r}(t) = \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{K'} + \vec{\omega}\times \right) \vec{r}(t)$$

Da wir für die Betrachtung der Scheinkräfte die Beschleunigungen benötigen, müssen wir die zweite Ableitung nach der Zeit berechnen. Wir verwenden dafür den bereits hergeleiteten Ausdruck:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}(t) = \left.\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}\right|_K &= \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{K'} + \vec{\omega}\times \right) \left[\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{K'} + \vec{\omega}\times \right) \vec{r}(t) \right] && (1) \\ &= \left.\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}\right|_{K'} + \left.\frac{d}{dt}\right|_{K'} (\vec{\omega} \times \vec{r}(t)) + \vec{\omega} \times \left.\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|_{K'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}(t)) && (2) \end{aligned}$$

Der zweite Term in der letzten Summe muss nochmals nach der Produktregel aufgeteilt werden:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{K'} (\vec{\omega} \times \vec{r}(t)) = \left.\frac{d\omega}{dt}\right|_{K'} \times \vec{r}(t) + \omega \times \left.\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|_{K'}$$

Der zweite der beiden termine taucht bereits an anderer Stell ein dem Gesamtausdruck auf, weshalb man diese beiden zusammenziehgen kann und mit dem folgenden Ausdruck endet:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \left.\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}\right|_K = \left.\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}\right|_{K'} + \left.\frac{d\omega}{dt}\right|_{K'} \times \vec{r}(t) + 2\vec{\omega} \times \left.\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|_{K'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}(t))$$

Woran wir eigentlich interessiert sind, ist ja die Beschleunigung im Bezugssystem K'. Diese ist (versehen mit einer Transformation in das Inertialsystem K) gegeben durch den ersten Term auf der rechten Seite der obigen Gleichung. Wenn wir nach diesem umstellen, erhalten wir:

$$M_{rot}\ddot{\vec{r}}'(t) = \left.\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}\right|_{K'} = \left.\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}\right|_K - \left.\frac{d\omega}{dt}\right|_{K'} \times \vec{r}(t) - 2\vec{\omega} \times \left.\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|_{K'} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}(t))$$

Für eine zeitlich konstante Winkelbeschleunigung verschwindet die Azimuthalbeschleunigung

$$\vec{a}_{azimuthal} = \left.\frac{d(\vec{\omega} = \text{konstant})}{dt}\right|_{K'} \times \vec{r}(t) = 0$$

Es bleiben also noch zwei Korrekturterme zur Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}(t)$, die nur auftreten, wenn wir das rotierende Bezugssystem K' für die Beschreibung der Bewegung verwenden. Diese sind:

$$\vec{a}_{Zentrifugal} = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}(t))$$

und

$$\vec{a}_{Coriolis} = -2\vec{\omega} \times \left.\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|_{K'}$$

Wenn wir die Koordinatentransformation des Vektors wieder in das rotierende System zurückvollziehen, dann entspricht das dem Entfernen der Rotationsmatrix M_{rot} und resultiert in folgendem Ausdruck (für $\vec{\omega} = \text{konstant}$)

$$\ddot{\vec{r}}'(t) = \frac{\vec{F}_{ext}}{m} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}'(t) - \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'(t)\right)$$

Hierbei wurde

$$\left.\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}\right|_K = \frac{\vec{F}_{ext}}{m}$$

gesetzt, da die externen Kräfte der Beschleunigung im Intertialsystem K entsprechen.

In [ ]:

```

```

In [ ]:

```

```