Einführung in die Quantenphysik

SS 2011 **1 . Übung**

Vorlesung: Prof. Igor Sokolov Übung: Sten Rüdiger, Federico Camboni

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Überlagerung von zwei eindimenensionalen räumlichen Wellen $a(k_1)e^{ik_1x}$ und $a(k_2)e^{ik_2x}$

$$\Psi(x) = a(k_1)e^{ik_1x} + a(k_2)e^{ik_2x}.$$

a) Skizzieren Sie $Re(\psi(x))$ für den Fall, dass $a(k_1) = a(k_2)$ und $k_1 = k-\Delta k$, $k_2 = k+\Delta k$ ist, mit $0 \leq \Delta k \ll k$. Berechnen Sie die erste Nullstelle Δx der Funktion $\Psi(x)$. Überprüfen Sie, ob die Relation

$$\Delta x \Delta k = \frac{\pi}{2}$$

erfüllt ist. Welche Konsequenz ergibt sich aus dieser Relation für eine räumliche Welle $\Psi(x) = a(k)e^{ikx}$ die nur aus einer ebenen Welle besteht? Wann ist diese normierbar?

Betrachten Sie nun das Wellenpaket

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\ \tilde{\Psi}(k)\, e^{i(kx-\omega(k)t)} \quad \text{mit} \quad \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

und

$$\tilde{\Psi}(k) = \begin{cases} A & |k-k_0| \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Gruppengeschwindigkeit mit der sich das Wellenpaket bewegt, ist durch $v_g = \frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}}{\mathrm{d}k}$ gegeben, wobei $\tilde{\omega}$ der Mittelwert von ω ist.

b) Bestimmen Sie A aus der Normierungsbedingung.

c) Berechnen Sie $\Psi(x,t)$ unter der Annahme $a \ll k_0$ aus. Skizzieren Sie $|\Psi(x, t = 0)|^2$.

   Hinweis: Führen Sie $q = k-k_0$ ein und vernachlässigen Sie die Terme der Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$).

d) Welche Gruppengeschwindigkeit besitzt das Wellenpaket? Skizzieren Sie noch einmal $|\Psi(x,t)|^2$ für $t > 0$. Wie hängt v_g mit dem zeitlichen Verhalten von $|\Psi(x,t)|^2$ zusammen? Wie wird dieses Verhalten physikalisch interpretiert?