
Einführung in die Quantenphysik

SS 2011

3. Übung

Abgabe am 3. Mai 2011

Vorlesung: Prof. Igor Sokolov Übung: Dr. Sten Rüdiger, Federico Camboni

Aufgabe 1: Korrespondenzvorschrift

Die klassische Hamilton-Funktion eines freien Teilchens in zwei Dimensionen lautet

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} .$$

- a) Berechnen Sie mit Hilfe der Korrespondenzvorschrift den (quantenmechanischen) Hamilton-Operator in Polarkoordinaten (r, ϕ) . Diskutieren Sie die beiden Fälle in denen die Koordinatentransformation vor bzw. nach der Anwendung des Korrespondenzprinzips durchgeführt wird.

Gegeben sind die beiden folgenden algebraisch äquivalenten Ausdrücke der kinetischen Energie in einer Dimension:

$$E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m} \quad \text{und} \quad E_{\text{kin}} = \frac{1}{2m} \frac{1}{\sqrt{q}} p q p \frac{1}{\sqrt{q}} .$$

- b) Benutzen Sie die Korrespondenzvorschrift, um die quantenmechanischen Entsprechungen dieser beiden Ausdrücke zu finden. Was ist der Unterschied zwischen den beiden Ausdrücken?

Gegeben sei die klassische Energie eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld:

$$E = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}(\vec{r}, t) \right)^2 + q\phi(\vec{r}, t) .$$

Hierbei ist m die Masse des Teilchens, \vec{p} dessen Impuls und q dessen Ladung, c ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, $\vec{A}(\vec{r}, t)$ und $\phi(\vec{r}, t)$ sind das Vektorpotential bzw. das skalare Potential des elektromagnetischen Feldes.

- c) Stellen Sie mit Hilfe der Korrespondenzvorschrift den Hamilton-Operator sowie die zugehörige Schrödingergleichung auf. Beachten Sie beim Ausmultiplizieren des quadratischen Terms, dass \vec{A} und $\vec{\nabla}$ nicht kommutieren.

Aufgabe 2: Kommutator

Ein wichtiges Merkmal in der Quantenmechanik ist die nicht-Kommutativität.

a) Der Kommutator $[\hat{A}, \hat{B}]$ ist über $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ gegeben. Vergleichen Sie die Definition des Kommutators mit der von Poissonklammern, welche in der analytischen Mechanik eingeführt wurden.

b) Zeigen Sie, dass für den Fall nicht kommutierender \hat{A} , \hat{B} und \hat{C} die folgenden Relationen gelten

– Produktregel: $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$

– Jacobi-Identität: $[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$.

c) Zeigen Sie, dass Orts- und Impulsoperator \hat{q} und \hat{p} die folgende Gleichung erfüllen

$$\hat{p}\hat{q}^2\hat{p}\hat{q} - \hat{p}\hat{q}^3\hat{p} - \hat{q}\hat{p}^2\hat{q}^2 + \hat{q}\hat{p}\hat{q}^2\hat{p} - i\hat{q}\hat{p}\hat{q} + \hat{q} = 0.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Vertauschungsrelation zwischen \hat{p} und \hat{q} , um jeden Term auf die Form $\hat{q}^k\hat{p}^l$ zu transformieren.