Einführung in die Quantenphysik

SS 2011 **4. Übung**

Abgabe am 10. Mai 2011

Vorlesung: Prof. Igor Sokolov Übung: Sten Rüdiger, Federico Camboni

Aufgabe 1: Eindimensionaler, unendlich tiefer Potentialtopf

Betrachten Sie ein Teilchen, dass in einem unendlich tiefen Rechteckpotential der Breite L gefangen ist. Seine Eigenfunktionen $\phi_n(x)$ zu den Energie-Eigenwerten E_n wurden bestimmt als

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad \text{bzw.} \qquad E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2mL^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

1. Zeigen Sie, dass die Eigenfunktionen $\phi_n(x)$ normiert sind, d. h. dass $\int_0^L dx |\phi_n(x)|^2 = 1$.

2. Berechnen Sie für allgemeines n den Erwartungswert des Ortes

   $$\langle x \rangle_n = \int_0^L dx\, \phi_n(x)^*\, x\, \phi_n(x)$$

   zum Zustand $\phi_n(x)$ und skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $|\phi_n(x)|^2$ für den Grundzustand ($n = 1$) und den ersten angeregeten Zustand ($n = 2$). Fällt der Erwartungswert $\langle x \rangle_n$ jeweils mit dem wahrscheinlichsten Ort (Maximum von $|\phi_n(x)|^2$) zusammen?

3. Berechnen Sie die Ortsunschärfe $\Delta x_n = \sqrt{\langle x^2 \rangle_n - \langle x \rangle_n^2}$. Wie verändert sie sich mit n?

4. Die Ortsdarstellung des Impulsoperators p lautet $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$. Zeigen Sie, dass sein Erwartungswert

   $$\langle p \rangle_n = \int_0^L dx\, \phi_n(x)^*\, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\, \phi_n(x)$$

   für alle n verschwindet. Kann man das bereits aus der Form der $\phi_n(x)$ ablesen? Hinweis: Die zweite Frage lässt sich mit Hilfe des Superpositionsprinzips beantworten.

5. Berechnen Sie die Impulsunschärfe $\Delta p_n = \sqrt{\langle p^2 \rangle_n}$. Wie hängt das Produkt $\Delta x_n \cdot \Delta p_n$ von n ab? Hinweis: Verwenden Sie $E = p^2/2m$, dann ist die Integration unnötig.

6. Berechnen Sie zuletzt noch $\Delta E_n = \sqrt{\langle E^2 \rangle_n - \langle E \rangle_n^2}$. Ist E eine gute Quantenzahl?

Aufgabe 2: Gebundene Zustände im doppelten δ-Potential

In folgendem Potential sollen gebundene Zustände untersucht werden:

$$V(x) = \mathcal{V}_0[\delta(x+a) + \delta(x-a)],$$

wobei $\mathcal{V}_0$ sowohl positiv als auch negativ sein kann. Unter einem gebundenen Zustand verstehen wir einen Zustand, dessen Wellenfunktion ψ exponentiell abfällt, d. h. $\psi(x) \sim e^{-\kappa|x|}$ für $x \to \pm\infty$ mit einem geeigneten Parameter $\kappa > 0$. Für das gegebene Potential existieren solche Zustände nur bei negativen Energien $E = -\hbar^2\kappa^2/2m$, warum?

1. Geben Sie allgemeine Lösungen für $\psi(x)$ in den drei Bereichen $x < -a$, $-a < x < a$ und $x > a$ an. Welche Bedingungen an die Koeffizienten ergeben sich aus Symmetrieüberlegungen? Skizzieren Sie die Lösungen. Hinweis: Benutzen Sie, dass gebundene Zustände in einer Dimension nicht entartet sind.

2. Folgern Sie aus den Stetigkeitsbedingungen bei $x = \pm a$, dass es nur zwei gebundene Zustände geben kann, deren Energien $E_\pm$ durch folgende Gleichungen für $\kappa_\pm$ bestimmt sind:

$$\kappa_+[1 + \tanh(\kappa_+ a)] = -2m\mathcal{V}_0/\hbar^2 \quad (1)$$

$$\kappa_-[1 + \mathrm{cotanh}(\kappa_- a)] = -2m\mathcal{V}_0/\hbar^2 \quad (2)$$

   Argumentieren Sie, dass gebundene Zustände nur für ein attraktives Potential ($\mathcal{V}_0 < 0$) existieren.

3. Bestätigen Sie, dass $\kappa_+ > \kappa_-$ und damit $E_+ < E_-$. Wie lässt sich dies mit der Symmetrie der Wellenfunktionen begründen?

4. Zeigen Sie für $\mathcal{V}_0 < 0$, dass der Grundzustand immer existiert und bestimmen Sie seine Energie für kleines $|\mathcal{V}_0|$. Argumentieren Sie, dass andererseits ein minimales $|\mathcal{V}_0|$ für die Existenz des angeregten Zustands notwendig ist.