Fortgeschrittene Quantentheorie

WS 2015/2016 **1 . Übung** **14.10.2015**

Abgabe am 21.10.2015 **vor** *der Vorlesung oder* **zuvor** *im Briefkasten (Moderne Optik)*

Vorlesung: Prof. Alejandro Saenz
Übung: Esther Kähler, Johann Förster, Stephen Onyango

Aufgabe 1

Ein Teilchen mit der Masse m bewegt sich entlang der x-Achse ($x \in [-\infty, \infty]$) und seine Wellenfunktion zu einem bestimmten Zeitpunkt lautet (mit Normierungskonstante N)

$$\psi(x) = \begin{cases} N \sin(bx) & \text{für} \quad |x| < \pi/b \\ 0 & \text{für} \quad |x| \geq \pi/b \end{cases} \quad .$$

a) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle x \rangle$ und $\langle x^2 \rangle$. Ist $\psi(x)$ ein Ortseigenzustand?

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle p \rangle$ und $\langle p^2 \rangle$. Ist $\psi(x)$ ein Impulseigenzustand?

c) Wird der Impuls des Teilchens mit Zustandsvektor ψ gemessen, welche Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathcal{P}(p)$ der Impulsmessergebnisse erwarten Sie im Fall idealer Messungen? Skizzieren Sie $\mathcal{P}(p)$.

d) Ist $\psi(x)$ ein Energieeigenzustand, wenn es ein freies Teilchen beschreibt ($V(x) = 0$)?

Aufgabe 2

Zeigen Sie unter Verwendung der Vertauschungsrelation $[\,\hat{\mathrm{q}}\,,\,\hat{\mathrm{p}}\,] = i\,\hbar$,

a) dass die Gleichungen

$$[\,\hat{\mathrm{p}}\,,\,\hat{\mathrm{q}}^n\,] = -i\,\hbar\,n\,\hat{\mathrm{q}}^{n-1} \qquad \text{und} \qquad [\,\hat{\mathrm{q}}\,,\,\hat{\mathrm{p}}^n\,] = i\,\hbar\,n\,\hat{\mathrm{p}}^{n-1}$$

erfüllt sind, und

b) mit Hilfe von a) dass für einen Hamilton-Operator von der Form $\hat{\mathrm{H}} = \hat{\mathrm{T}} + \hat{\mathrm{V}} = \dfrac{\hat{\mathrm{p}}^2}{2m} + a\,\hat{\mathrm{q}}^n$ die folgenden Operatorbeziehungen

$$\left[\,\hat{\mathrm{q}}\,\hat{\mathrm{p}}\,,\,\hat{\mathrm{H}}\,\right] = i\,\hbar\,\left(\frac{\hat{\mathrm{p}}^2}{m} - a\,n\,\hat{\mathrm{q}}^n\right) = i\,\hbar\,\left(2\,\hat{\mathrm{T}} - n\,\hat{\mathrm{V}}\right)$$

gelten. Was können Sie mit Hilfe des Ehrenfest-Theorems aus dieser Beziehung ableiten?

Aufgabe 3

Mit den Eigenzuständen der Pauli-Matrix $\boldsymbol{\sigma_z}$ als vollständige Orthonormalbasis, $|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Eigenwert +1) und $|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Eigenwert −1), sollen die Observablen A, B und C die Matrixdarstellungen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \; ; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \; ; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix}$$

besitzen. Für einen bestimmten Spinzustand wurden die Erwartungswerte

$$\langle\, A \,\rangle \,=\, 2 \; ; \quad \langle\, B \,\rangle \,=\, \frac{1}{2} \; ; \quad \langle\, C \,\rangle \,=\, 0$$

gemessen.

a) Bestimmen Sie die Dichtematrix $\boldsymbol{\rho}$ des Spinzustands.

b) Handelt es sich um einen reinen oder einen gemischten Spinzustand?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung in z-Richtung den Spinwert $+\hbar/2$ zu finden?
Erinnerung: $\mathbf{S_z} = \dfrac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma_z}$

d) Berechnen Sie die Erwartungswerte der Pauli-Matrizen, also $\langle\, \sigma_x \,\rangle$, $\langle\, \sigma_y \,\rangle$, $\langle\, \sigma_z \,\rangle$.

Hinweis:

$$\boldsymbol{\sigma_x} \,=\, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad \boldsymbol{\sigma_y} \,=\, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad \boldsymbol{\sigma_z} \,=\, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \; .$$