Fortgeschrittene Quantentheorie

WS 2015/2016 **2 . Übung** **21.10.2015**

Abgabe am 28.10.2015 **vor** *der Vorlesung oder* **zuvor** *im Briefkasten (Moderne Optik)*

Vorlesung: Prof. Alejandro Saenz Übung: Esther Kähler, Johann Förster, Stephen Onyango

Aufgabe 1

Eine idealisierte Stern-Gerlach-Apparatur sei in Richtung

$$\boldsymbol{e} \;=\; (\,\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\,)$$

orientiert. Diese präpariert die reinen Spinzustände $|e_\pm\rangle$ als Eigenzustände von $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}$ mit dem Pauli-Matrixvektor

$$\boldsymbol{\sigma} \;=\; (\boldsymbol{\sigma_x}, \boldsymbol{\sigma_y}, \boldsymbol{\sigma_z})\ .$$

a) Berechnen Sie $|e_\pm\rangle$.

b) Wie lauten die Dichtematrizen $\boldsymbol{\rho}_{e_\pm}$ für die in a) berechneten reinen Zustände in der Basis $|e_\pm\rangle$?

c) Zeigen Sie, dass sich die Dichtematrizen $\boldsymbol{\rho}_{e_\pm}$ in der Basis der Eigenzustände der Pauli-Matrix $\boldsymbol{\sigma}_z$, also $|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, in der Form

$$\boldsymbol{\rho}_{e_\pm} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\pm\cos\theta & \pm e^{-i\varphi}\sin\theta \\ \pm e^{i\varphi}\sin\theta & 1\mp\cos\theta \end{pmatrix}$$

schreiben lassen.

d) Die Komponenten des Elektronenspinpolarisationsvektors $\mathbf{P}$ sind durch

$$P_i \;=\; \langle\boldsymbol{\sigma_i}\rangle \;=\; \mathrm{Sp}\,\{\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\sigma_i}\}$$

definiert. Welcher Polarisationsvektor $\mathbf{P}$ ergibt sich, wenn der reine Zustand $|e_-\rangle$ präpariert wurde?

e) Es seien $p_\pm$ die Gewichte der Zustände $|e_\pm\rangle$ in einem gemischten Zustand. Drücken Sie die Dichtematrix $\boldsymbol{\rho}$ und die Elektronenspinpolarisation $\mathbf{P}$ durch $p_\pm$ aus und zeigen Sie dann

$$\boldsymbol{\rho} \;=\; \frac{1}{2}\,(\,\mathbf{1} + \mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,) \quad .$$

f) Berechnen Sie die Kommutatoren $[\boldsymbol{\sigma_x}, \boldsymbol{\sigma_y}]$, $[\boldsymbol{\sigma_x}, \boldsymbol{\sigma_z}]$ und $[\boldsymbol{\sigma_y}, \boldsymbol{\sigma_z}]$.

g) Bestimmen Sie mit der Hamilton-Matrix $\mathbf{H} = \hbar\omega\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{e}$ die Zeitableitung der Dichtematrix aus e) sowie des Polarisationsvektors $\mathbf{P}$ und diskutieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 2

Betrachten Sie ein Zweiniveausystem mit den Eigenzuständen $|0\rangle$ und $|1\rangle$ des Hamilton-Operators $\hat{\mathrm{H}}_0$, wobei $\hat{\mathrm{H}}_0 |0\rangle = 0 |0\rangle$ und $\hat{\mathrm{H}}_0 |1\rangle = \Delta E |1\rangle$ gelten soll. Zerfallsprozesse können mit Hilfe des Dichtematrixformalismus beschrieben werden, indem ein phänomenologischer Zerfallsterm eingeführt wird. Für einen Zerfall $|1\rangle \to |0\rangle$ mit Zerfallsrate Γ ergibt sich für die Zeitableitung des Dichteoperators

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{\mathrm{H}}_0, \hat{\rho}\right] - \frac{\Gamma}{2}\big(|1\rangle \langle 1| \hat{\rho} - 2 |0\rangle \langle 1| \hat{\rho} |1\rangle \langle 0| + \hat{\rho} |1\rangle \langle 1| \big) \quad .$$

Bestimmen Sie ausgehend von der Dichtematrix zum Zeitpunkt $t = 0$,

$$\boldsymbol{\rho}(t=0) = \begin{pmatrix} \rho_{00}(0) & \rho_{01}(0) \\ \rho_{10}(0) & \rho_{11}(0) \end{pmatrix},$$

die Zeitabhängigkeit der Dichtematrix $\boldsymbol{\rho}(t)$ und diskutieren Sie das Ergebnis. Entspricht es Ihren Erwartungen für einen Zerfallsprozess, wie beispielsweise dem des radioaktiven Zerfalls?