Fortgeschrittene Quantentheorie

WS 2015/2016 **3 . Übung** **28.10.2015**

Abgabe am 4.11.2015 **vor** *der Vorlesung oder* **zuvor** *im Briefkasten (Moderne Optik)*

Vorlesung: Prof. Alejandro Saenz Übung: Esther Kähler, Johann Förster, Stephen Onyango

Aufgabe 1

Betrachten Sie zwei zweidimensionale Einteilchen-Hilberträume $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$. Die mit $|+\rangle$ und $|-\rangle$ bezeichneten Basisvektoren sind durch

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Weiterhin seien

$$\mathbf{S}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{T}_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

die Matrixdarstellungen der Operatoren $\hat{\mathrm{S}}_{\mathcal{E}}$ in $\mathcal{E}$ bzw. $\hat{\mathrm{T}}_{\mathcal{F}}$ in $\mathcal{F}$ in der Einteilchenbasis $|+\rangle$ und $|-\rangle$, d. h. z. B. $s_{11} = \langle + | \hat{\mathrm{S}} | + \rangle$ und $s_{12} = \langle + | \hat{\mathrm{S}} | - \rangle$. Der Raum $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ wird durch die vier Vektoren $|+,+\rangle$, $|+,-\rangle$, $|-,+\rangle$, $|-,-\rangle$ aufgespannt.

a) Bestimmen Sie die Erweiterung der Operatoren $\hat{\mathrm{S}}_{\mathcal{E}}$ und $\hat{\mathrm{T}}_{\mathcal{F}}$ auf den Raum $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$

$$\hat{\mathrm{S}}_{\mathcal{E}} \to \hat{\mathrm{S}}_{\mathcal{E}} \otimes \hat{\mathrm{I}}_{\mathcal{F}} \qquad \text{und} \qquad \hat{\mathrm{T}}_{\mathcal{F}} \to \hat{\mathrm{I}}_{\mathcal{E}} \otimes \hat{\mathrm{T}}_{\mathcal{F}}$$

in Matrixdarstellung.

b) Ermitteln Sie die Matrixdarstellung von $\hat{\mathrm{S}}_{\mathcal{E}} \otimes \hat{\mathrm{T}}_{\mathcal{F}}$ auf zwei Weisen, indem Sie zuerst das Matrixprodukt zwischen $\mathbf{S}_{\mathcal{E}} \otimes \mathbf{I}_{\mathcal{F}}$ und $\mathbf{I}_{\mathcal{E}} \otimes \mathbf{T}_{\mathcal{F}}$ bilden und danach die Matrixelemente von $\mathbf{S}_{\mathcal{E}} \otimes \mathbf{T}_{\mathcal{F}}$ direkt berechnen.

c) Geben Sie die Vektordarstellungen von $|+,+\rangle$, $|+,-\rangle$, $|-,+\rangle$, $|-,-\rangle$ an. Überzeugen Sie sich mit ihrer Hilfe, dass die Anwendung von $\mathbf{S}_{\mathcal{E}} \otimes \mathbf{T}_{\mathcal{F}}$ auf einen beliebigen Vektor aus $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ aus Aufgabenteil b) einer Anwendung von $\mathbf{S}_{\mathcal{E}}$ auf den ersten und von $\mathbf{T}_{\mathcal{F}}$ auf den zweiten Vektor entspricht.

d) Geben Sie die Vektordarstellungen von $|+,+,+\rangle$, $|+,-,+\rangle$, $|-,-,+\rangle$ und $|-,-,-\rangle$ an.

e) Bestimmen Sie die folgenden Kommutatorrelationen

$$[\boldsymbol{\sigma}_{i,\mathcal{E}} \otimes \boldsymbol{\sigma}_{m,\mathcal{F}}\, , \boldsymbol{\sigma}_{j,\mathcal{E}} \otimes \boldsymbol{\sigma}_{n,\mathcal{F}}]$$

mit den Pauli-Matrizen $\boldsymbol{\sigma}$, wobei die $\{i,\, j,\, m,\, n\}$ jeweils beliebige Werte aus $\{x,\, y,\, z\}$ annehmen können.

Aufgabe 2

Die *unnormierten* Ortswellenfunktionen zweier nicht-wechselwirkender (eindimensionaler) Teilchen lauten

$$\begin{array}{lcll} \Psi(x_1, x_2) & = & \phi(x_1) \cdot \psi(x_2) & \text{für unterscheidbare Teilchen} \\ \Psi^{(-)}(x_1, x_2) & = & \phi(x_1) \cdot \psi(x_2) - \phi(x_2) \cdot \psi(x_1) & \text{für ununterscheidbare Fermionen} \\ \Psi^{(+)}(x_1, x_2) & = & \phi(x_1) \cdot \psi(x_2) + \phi(x_2) \cdot \psi(x_1) & \text{für ununterscheidbare Bosonen} \end{array}$$

wobei $\phi(x)$ bzw. $\psi(x)$ ihrerseits die *unnormierten* Funktionen

$$\phi(x) = (1 + x)\, e^{-x^2} \qquad \text{bzw.} \qquad \psi(x) = (1 - x)\, e^{-x^2/4}$$

sind. Berechnen Sie die Erwartungswerte der Operatoren $\hat{\mathrm{V}}_1 = x_1^2$, $\hat{\mathrm{V}}_2 = x_2^2$ und $\hat{\mathrm{V}}_{1,2} = (x_1 - x_2)^2$, wenn sich die Teilchen in den über $\Psi(x_1, x_2)$, $\Psi^{(-)}(x_1, x_2)$ und $\Psi^{(+)}(x_1, x_2)$ charakterisierten Zuständen befinden.