Fortgeschrittene Quantentheorie

WS 2015/2016 **4 . Übung** **4.11.2015**

Abgabe am 11.11.2015 **vor** *der Vorlesung oder* **zuvor** *im Briefkasten (Moderne Optik)*
Bitte schreiben Sie den Namen Ihres Übungsgruppenleiters auf das Übungsblatt.

Vorlesung: Prof. Alejandro Saenz Übung: Esther Kähler, Johann Förster, Stephen Onyango

Aufgabe 1

Es sollen aus drei Teilchen bestehende Quantensysteme betrachtet werden, deren Gesamtkoordinaten (nicht nur die Raumkoordinaten) mit (1), (2) und (3) abgekürzt werden, d. h. 1 steht für alle Koordinaten von Teilchen 1 etc. Eine Konfiguration $|\,\Phi_i(1,2,3)\,\rangle$ des Dreiteilchensystems ist eine geeignet symmetrisierte Linearkombination aus Tensorprodukten von je drei Einteilchenwellenfunktionen, die hier mit $\phi_\alpha, \phi_\beta, \ldots$ bezeichnet werden und orthonormal sein sollen, d. h. es gilt $\langle\,\phi_k\,|\,\phi_l\,\rangle = \delta_{k,l}$. Durch Linearkombination der einzelnen Tensorprodukte wird eine Konfiguration Φ_i gebildet, wobei der Index i für die drei verschiedenen Einteilchenwellenfunktionen α, β und γ steht. Für die einzelnen Tensorprodukte bietet sich die Kurzschreibweise

$$|\,\phi_\alpha(1)\,\rangle \otimes |\,\phi_\beta(2)\,\rangle \otimes |\,\phi_\gamma(3)\,\rangle \;\equiv\; |\,\alpha\,\rangle \otimes |\,\beta\,\rangle \otimes |\,\gamma\,\rangle \;\equiv\; |\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\rangle$$

zur Verringerung des Schreibaufwands an. (*Anmerkung:* Im Fall nicht-wechselwirkender Teilchen entspräche eine Konfiguration $|\,\Phi_i(1,2,3)\,\rangle$ zugleich einem physikalischen Zustand $|\,\Psi_i(1,2,3)\,\rangle$ des Dreiteilchensystems, wenn die $|\,\phi\,\rangle$ Eigenfunktionen des entsprechenden Einteilchen-Hamilton-Operators sind.)

a) Geben Sie explizit die geeignet symmetrisierten Konfigurationen $|\,\Phi_i(1,2,3)\,\rangle$ (für unterscheidbare Teilchen), $|\,\Phi_i^{(+)}(1,2,3)\,\rangle$ (für ununterscheidbare Bosonen) und $|\,\Phi_i^{(-)}(1,2,3)\,\rangle$ (für ununterscheidbare Fermionen) an.

b) Geben Sie, soweit physikalisch sinnvoll, analog zu Teil a) die geeignet symmetrisierten Konfigurationen für die Fälle an, dass zwei oder drei Einteilchenwellenfunktionen übereinstimmen ($i = \{\alpha,\alpha,\beta\}$ bzw. $i = \{\alpha,\alpha,\alpha\}$).

c) Betrachten Sie einen Einteilchenoperator, d. h. einen Operator, der nur von der Koordinate jeweils eines Teilchens abhängt. Dieser Operator $\hat{\mathrm{V}}$ soll die Form

$$\hat{\mathrm{V}} = \hat{\mathrm{v}}(1) + \hat{\mathrm{v}}(2) + \hat{\mathrm{v}}(3)$$

besitzen. Geben Sie nun die Matrixelemente $V_{i,j} = \langle\,\Phi_i(1,2,3)\,|\,\hat{\mathrm{V}}\,|\,\Phi_j(1,2,3)\,\rangle$, $V_{i,j}^{(+)} = \langle\,\Phi_i^{(+)}(1,2,3)\,|\,\hat{\mathrm{V}}\,|\,\Phi_j^{(+)}(1,2,3)\,\rangle$ und $V_{i,j}^{(-)} = \langle\,\Phi_i^{(-)}(1,2,3)\,|\,\hat{\mathrm{V}}\,|\,\Phi_j^{(-)}(1,2,3)\,\rangle$ des Operators $\hat{\mathrm{V}}$ zwischen zwei Konfigurationen als Funktion von Matrixelementen zwischen Einteilchenwellenfunktionen ($v_{\alpha,\beta} = \langle\,\phi_\alpha\,|\,\hat{\mathrm{v}}\,|\,\phi_\beta\,\rangle$) an, wenn beide Konfigurationen in keiner Einteilchenwellenfunktion übereinstimmen, d. h. für $i = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ und $j = \{\delta,\mu,\nu\}$. (Beachten Sie die untenstehenden Hinweise!)

(Fortsetzung auf nächster Seite ...)

d) Berechnen Sie analog zu Teil c) die Matrixelemente $V_{i,k} = \langle\, \Phi_i(1,2,3)\,|\,\hat{\mathrm{V}}\,|\,\Phi_k(1,2,3)\,\rangle$, $V_{i,k}^{(+)} = \langle\, \Phi_i^{(+)}(1,2,3)\,|\,\hat{\mathrm{V}}\,|\,\Phi_k^{(+)}(1,2,3)\,\rangle$ und $V_{i,k}^{(-)} = \langle\, \Phi_i^{(-)}(1,2,3)\,|\,\hat{\mathrm{V}}\,|\,\Phi_k^{(-)}(1,2,3)\,\rangle$ für den Fall $i = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ und $k = \{\delta,\alpha,\nu\}$, d. h. die Konfigurationen beinhalten eine gleiche Einteilchenwellenfunktion.

e) Berechnen Sie analog zu Teil c) die Matrixelemente $V_{i,l} = \langle\, \Phi_i(1,2,3)\,|\,\hat{\mathrm{V}}\,|\,\Phi_l(1,2,3)\,\rangle$, $V_{i,l}^{(+)} = \langle\, \Phi_i^{(+)}(1,2,3)\,|\,\hat{\mathrm{V}}\,|\,\Phi_l^{(+)}(1,2,3)\,\rangle$ und $V_{i,l}^{(-)} = \langle\, \Phi_i^{(-)}(1,2,3)\,|\,\hat{\mathrm{V}}\,|\,\Phi_l^{(-)}(1,2,3)\,\rangle$ für den Fall $i = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ und $l = \{\delta,\alpha,\beta\}$, d. h. die Konfigurationen beinhalten zwei gleiche Einteilchenwellenfunktionen.

Hinweise:

1. Denken Sie daran, dass die Reihenfolge in den Indizes $i = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ für symmetrisierte Konfigurationen entsprechend vertauschbar ist.

2. Versuchen Sie als erstes, alle Matrixelemente zu identifizieren, die aufgrund der Orthonormalität der $\{|\,\phi_\kappa\,\rangle\}$ Null sind.

Aufgabe 2

Betrachten Sie zwei zweidimensionale Einteilchen-Hilberträume mit den Basisvektoren

$$|\,0\,\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad |\,1\,\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gegeben seien die Zweiteilchenoperatoren $\hat{\mathrm{B}}$ und $\hat{\mathrm{C}}$, welche in Matrixdarstellung die Form

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\sigma}_x \qquad \text{und} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}_x \end{pmatrix}$$

besitzen, wobei $\mathbf{I}$ für die zweidimensionale Einheitsmatrix und $\boldsymbol{\sigma}_x$ für die erste Pauli-Matrix steht.

a) Berechnen Sie die Wirkung der Operatoren $\hat{\mathrm{B}}$ und $\hat{\mathrm{C}}$ auf die Zustände $|\,0,0\,\rangle$, $|\,0,1\,\rangle$, $|\,1,0\,\rangle$ und $|\,1,1\,\rangle$ und diskutieren Sie die Ergebnisse.

b) Zeigen Sie, dass sich die Matrixdarstellung des Operators $\hat{\mathrm{C}}$ nicht als Tensorprodukt

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \otimes \mathbf{N}$$

schreiben lässt, wobei $\mathbf{M}$ bzw. $\mathbf{N}$ jeweils für eine zweidimensionale Matrix steht.

c) Wie unterscheidet sich die Wirkung von einem Operator auf einen Mehrteilchenzustand für die Fälle, dass der Operator sich (i) als Tensorprodukt bzw. (ii) nicht als Tensorprodukt darstellen lässt?